

بازده نسبت به مقیاس در فناوری های تولید محدب

چکیده :

مفهوم بازده نسبت به مقیاس (RTS) در تحلیل پوششی داده ها (DAE) به خوبی جا افتاده است. در فناوری تولید بازده نسبت به مقیاس متغیر، شناسایی RTS ارتباط بسیار تنگاتنگی با سایر ویژگی های مقیاس نظیر کشش مقیاس، بیشترین مقیاس بهره وری (MPSS) و انواع RTS عمومی که شاخص جهت MPSS است دارد. در طی سال های اخیر، بیشتر این فناوری ها چند وجهی می باشند، و از این روی مجموعه های بسته و محدب می باشند. مثال ها در این زمینه شامل فناوری های با خروجی های نامطلوب با قابلیت عرضه و بازیافت ضعیف، مدل های توازن تولید و محدودیت وزن، فناوری های شامل فرایند های تولید چند مولفه ای و مدل های تحلیل پوششی داده های شبکه هستند. برای بیشتر این فناوری، رابطه بین RTS و سایر ویژگی های مقیاس هنوز کشف نشده است. نتایج نظری بدست آمده در این مقاله این روابط را برای دسته زیادی از فناوری های محدب بسته اثبات می کند که از این میان، فناوری های چند وجهی، یک مثال بارز می باشند.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده ها، فناوری محدب، کشش مقیاس، بازده نسبت به مقیاس

1- مقدمه

مفهوم بازده نسبت به مقیاس (RTS) در تحلیل پوششی داده ها (DAE) به خوبی اثبات شده است برای مثال به کوپر، سیفورد و تون (2007)، رای (2004) و نانسولیس، پرتلا و دیسپیگ (2008) مراجعه کنید. منابع مربوط به تحلیل پوششی داده ها با استناد به نتایج قبلی بانکر 1984 و بانکر و ترال 1992، عمدتاً بر تعریف و ارزیابی RTS در فناوری تولید نسبت بازده به مقیاس متغیر تاکید کرده اند که برای آن ها روش های مختلفی موجود است (به بانکر، کوپر، سفورد و زو 2011، ساهو و تون 2015 مراجعه کنید).

شناسایی RTS واحد تصمیم گیری (DMU) نیز با مفهوم کارایی مقیاس و بیشترین مقیاس بهره وری (MPSS) معرفی شده توسط بانکر، جارتز و کوپر 1984 و بانکر 1984 ارتباط دارد. به علاوه ارتباطات را می توان به مفهوم RTS عمومی (GRS) معرفی شده توسط پادینوسکی 2004 الف و پادینوسکی 2004 ب مرتبط دانست. شناسایی GRS از این جهت دارای ماهیت عمومی است که انواع آن نشان دهنده جهت MPSS بوده و با خواص محلی)

حاشیه ای) تابع تولید) تعریف نمی شوند. در فناوری VRS، شناخته شده ترین نتایج مربوط به رابطه بین RTS سایر ویژگی های مقیاس را می توان به صورت زیر خلاصه کرد.

1- یک روش استاندارد برای آزمون این که آیا یک DMU در MPSS ایجاد می شود، ناشی از تعریف MPSS توسط بانکر (1984) است. این بر اساس ارزیابی کارایی شعاعی ورودی یا خروجی DMU در فناوری نسبت بازده به مقیاس ثابت مرجع چارنز، کوپر و رادس (1978) است که به طور کلی، یک فناوری مخروطی تولید شده توسط فناوری VRS است.

2- یک شیوه جایگزین برای تست MOSS، ارزیابی نوع RTS توجیه شده با DMU است. یعنی، یک DMU در صورتی در MPSS قرار دارد که اگر تنها اگر CRS را نشان دهد (بانکر و ترال 1992).

3- شناسایی GRS DMU ها در فناوری VRS، اگرچه به طور کلی متفاوت از شناسایی RTS محلی استف در رابطه با فناوری VRS مطابق با مورد اخیر است. این موضوع به طور موثر از قضیه 1 اثبات شده توسط بانکر 1984 تبعیت می کند

در طی سال های اخیر، تعدادی از فناوری های تولید جدید در منابع تحلیل پوششی داده ها توسعه یافته و مطالعه شده اند. بیشتر این فناوری ها به صورت مجموعه های چند وجهی و محدب در ابعاد خروجی و ورودی می باشند. پادینوسکی، چمبرز، آتیکی و دینکو 2016 این فناوری ها را به صورت فناوری های چند وجهی در نظر گرفته اند.

دسته فناوری های چند وجهی بسیار بزرگ بوده و شامل بیشتر فناوری تحلیل پوششی داده محدب می باشد نظیر فناوری های CRS و VRS ارایه شده توسط چارنز و همکاران 1978 و بانکر و همکاران 1984. مثال های بیشتر شامل فناوری های VRS و CRS هستند که توسط توزان تولید یا محدودیت های وزن (آتیکی و پودینوسکی 2015، جووو و کارنونن 2015، پادینوسکی 2004، ب، 2015، 2007، 2016، پادینوسکی و بازدین-چمبویا 2013، 2015)، فناوری VRS قابل عرضه ضعیف (کوزمانن 2005، کوزماننو کاظمی متین 2011، کازمانن و پادینوسکی)، فتاوری بازگشت به مقیاس ترکیبی (HRS) (پادینوسکی 2004، پ، پادینوسکی، اسماعیل، بازدین-چمبویا و زان 2014)، فناوری CRS محدب با خروجی ها و ورودی های ثابت برون زا (پادینوسکی و بادزیم چاموا 2011)، برخی از مدل های فناوری با فرایند های چند مولفه ای (چرچی، دراک، دیرنیک، رادهوفت و ساب

2013، چرچی، دی راک و والر 2015، 2016، کوک و زو 2011) و مدل های تحلیل پوششی داده های شبکه مختلف (کایو 2014، شاهو، زو، تونو کلمن 2014) توسعه یافته اند.

بدیهی است که RTS و شناسایی مقیاس مربوطه نظیر MPSS برای همه فناوری های چند وجهی مهم است. از این روی، چندین محقق، روش های قرار دادی را برای ارزیابی RTS در فناوری های ویژه توسعه داده اند (تون 2001، ساهو و همکاران 2014). رادینوسکی و همکاران (2016) یک روش عمومی را برای شناسایی RTS DMU در هر روش چند وجهی توسعه داده اند. این رویکرد، از روش های برنامه نویسی خطی برای محاسبه کشش های مقیاس یک طرفه استفاده می کند که انواع RTS را تعریف می کند.

اگرچه منابع فعلی تحلیل داده های پوششی امکان تعریف و ارزیابی انواع RTS را برای هر فناوری چند وجهی می دهد، و روش های دیگری برای شناسایی GRS وجود دارد، رابطه بین انواع RTS و GRS (از جمله MPSS) کشف نشده است. یک استثناء، هم ارزی و برابری شناسایی RTS و GRS برای فناوری های محدب است که مرز های آن ها هموار و یکنواخت است که توسط پادینوسکی 2004 الف اثبات شده است. با این حال این نتیجه قابل تعمیم به فناوری های چند وجهی نیست. این مقاله سعی در پر کردن شکاف و خلاء فوق دارد. هدف اصلی این مقاله اثبات تعادل ویژگی های عمومی و محلی RTS در فناوری چند وجهی می باشد. به طور ویژه این نشان می دهد که یک DMU در صورتی CRS را نشان می دهد که اگر و تنها اگر در MPSS باشد. در حقیقت، از دیدگاه نظری، تعمیم و اثبات این نتیجه در دسته بزرگی از فناوری های محدب بسته امری ساده است از مهم ترین فناوری های چند وجهی، یک مورد ویژه است.

از دیدگاه عملی، تعادل و هم ارزی اثبات شده مفاهیم RTS و GRS به ما ابزاری جدید را برای ارزیابی انواع GRS در هر فناوری چند وجهی (و به طور کلی محدب و بسته) با ارزیابی انواع RTS می دهد. به طور دقیق تر، روش های استاندارد برای ارزیابی MPTSS و GRS نیازمند استفاده از فناوری های مرجع است (نظیر CRS، فناوری های RTS غیر افزایشی و غیر کاهشی به خصوص اگر فناوری واقعی VRS است). برای بسیاری از فناوری های چند وجهی، فناوری های مرجع آن ها ممکن است قابل دسترس نباشند و قبل از استفاده نیازمند توسعه و بهبود بیشتر هستند. نتایج نظری جدید اثبات شده در این مقاله به ما امکان اجتناب از این مسئله را داده و در عوض ما از روش های موجود برای ارزیابی RTS استفاده می کنیم.

ما با یک مثال عددی که شامل ویژگی های RTS و GRS یک فناوری VRS توسعه یافته با تعیین محدودیت های وزنی است، اهمیت نتایج جدید را نشان می دهیم. ما هم چنین در مورد تعمیم نتایج جدید به مدل تحلیل پوششی داده شبکه ای دو مرحله بحث می کنیم

2- تابع پاسخ خروجی

یک فناوری تولید $T \in \mathbb{R}_+^{m+s}$ را در نظر بگیرید که در آن m تعداد ورودی ها و s تعداد خروجی ها است. درایه ها یا مولفه های T به صورت $DMUs (X, Y)$ است که $X \in \mathbb{R}_+^m$ و $Y \in \mathbb{R}_+^s$ به ترتیب بردار های ورودی و خروجی هستند.

در غیر این صورت، تنها دو فرض کلی در مورد T مطرح می شود که به صورت مجموعه بسته و محدب است. ما T را به صورت یک فناوری محدب بسته در نظر می گیریم. همان طور که در بالا گفته شد، یک مثال عملی مهم از این فناوری ها دسته فناوری های چند وجهی است.

را در نظر بگیرید که در آن T فناوری محدب بسته است. در سراسر این مقاله، می توان $DMU (X_0, Y_0) \in T$ فرض کرد که $X_0 \neq \emptyset$ و $Y_0 \neq \emptyset$ است. اساس توسعه ما، تابع پاسخ خروجی $\bar{\beta}(\alpha)$ است که به صورت زیر تعریف می شود

$$\bar{\beta}(\alpha) = \max \{ \beta \mid (\alpha X_0, \beta Y_0) \in T, \beta \in \mathbb{R} \}. \quad (1)$$

در فرمول 1، α اسکالر، تغییر متناسب با بردار ورودی X_0 را تعریف می کند و β تغیی متناسب با بردار خروجی Y_0 تعریف می کند. تابع پاسخ خروجی $\bar{\beta}(\alpha)$ برابر با ماکزیمم نسبت β از بردار خروجی Y_0 است که در فناوری T از بردار ورودی αX_0 تولید می شود.

ما هم چنین فرضیه زیر را مطرح می کنیم

فرضیه 1: $DMU (X_0, Y_0)$ خروجی کارآمد شعاعی است یعنی

$$\bar{\beta}(1) = \max \{ \beta \mid (X_0, \beta Y_0) \in T, \beta \in \mathbb{R} \} = 1$$

فرض کنید که Γ مرکز تابع $\bar{\beta}(\alpha)$ یعنی $\Gamma \in \mathbb{R}$ مجموعه ای از همه α است که برای آن یک β وجود دارد

به طوری که $(\alpha X_0, \beta Y_0) \in T$ است و پر واضح است که $1 \in \Gamma$ می باشد

قضیه 1

Γ - بازه بسته در \mathbb{R}_+ است

- به ازای همه $\alpha \in \Gamma$ ، ماکزیمم در (1) به صورت متناهی بوده و بدست می آید

- $\bar{\beta}(\alpha)$ تابع پیوسته و محدب بر روی Γ است

اثبات قضیه 1 و سایر اظهارات در پیوست الف نشان داده شده است

شناسایی DMU RTS های توسعه یافته در زیر بر اساس مفهوم مشتقات سمت راست و چپ تابع $\bar{\beta}(\alpha)$ می

باشد که به ترتیب به صورت $\bar{\beta}'_+(\alpha)$ و $\bar{\beta}'_-(\alpha)$ نشان داده می شوند. بر اساس قضیه 1-24 در راکفلار (1970)

(1970) برای تابع معقر $\bar{\beta}(\alpha)$ ، ما ویژگی های زیر را از مشتقات یک طرفه $\bar{\beta}'_+(\alpha)$ و $\bar{\beta}'_-(\alpha)$ با مقادیر

اختیار شده در بازه $[-\infty, +\infty]$ خواهیم داشت:

1- مشتقات یک طرفه $\bar{\beta}'_+(\alpha)$ و $\bar{\beta}'_-(\alpha)$ به ازای همه $\alpha \in \Gamma$ وجود دارند. به ازای هر α درونی Γ ، هر دو $\bar{\beta}'_+(\alpha)$

و $\bar{\beta}'_-(\alpha)$ متناهی هستند.

2- در صورتی که α نقطه اکسترم سمت چپ Γ باشد، $\bar{\beta}'_+(\alpha)$ می تواند متناهی یا باشد. به طور مشابه، اگر α

نقطه اکسترم ثابت Γ باشد، $\bar{\beta}'_-(\alpha)$ می تواند متناهی یا $-\infty$ باشد

3- به ازای همه $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \Gamma$ به طوری که $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ ، ویژگی یکنواختی را خواهیم داشت:

$$\bar{\beta}'_+(\alpha_1) \geq \bar{\beta}'_-(\alpha_2) \geq \bar{\beta}'_+(\alpha_2) \geq \bar{\beta}'_-(\alpha_3). \quad (2)$$

برای راحتی بیشتر، به طور رسمی $\bar{\beta}'_-(\alpha) = +\infty$ را تعریف می کنیم که اگر α نقطه اکسترم سمت چپ Γ

باشد و $\bar{\beta}'_+(\alpha) = -\infty$ اگر α نقطه اکسترم مثبت Γ است. اگرچه هیچ یک از این مشتقات یک طرفه به صورت

کلاسیک وجود ندارد، این تعریف به ما در اجتناب از در نظر گرفتن نقاط اکسترم Γ در تعریف RTS زیرکمک می

کند.

تبصره 1: در صورتی که فناوری T چند وجهی باشد، علاوه بر ویژگی های نشان داده شده در قضیه 1، تابع $\bar{\beta}(\alpha)$ تکه ای خطی بر روی Γ است. این نشان می دهد که اگر α نقطه اکسترم چپ Γ باشد، $\bar{\beta}'_+(\alpha)$ متناهی است. به طور مشابه، اگر α نقطه اکسترم راست Γ باشد، $\bar{\beta}'_-(\alpha)$ متناهی است.

همان طور که در زیر نشان داده شده است مشتقات یک طرفه در $\alpha = 1$ ارزیابی می شود. به ازای هر فناوری چند وجهی، هر دو مشتق را می توان با استفاده از برنامه های خطی توسعه یافته توسط پادینوسکی و همکاران 2016 محاسبه کرد

3- کشش مقیاس یک طرفه

اگر $\alpha = 1$ نقطه درونی Γ باشد و تابع $\bar{\beta}(\alpha)$ در $\alpha = 1$ مشتق پذیر است، کشش مقیاس $\varepsilon(X_0, Y_0)$ در $DMU(X_0, Y_0)$ ارزیابی می شود و به صورت زیر تعریف می شود

$$\varepsilon(X_0, Y_0) = \bar{\beta}'(1). \quad (3)$$

مفهوم این تعریف ساده است. به طور ویژه تر، فرض می شود که $\varepsilon(X_0, Y_0) = 2$ است. فرض کنید که بردار ورودی X_0 با نسبت کوچکی افزایش می یابد برای مثال تا 1 درصد (متناظر با $\alpha = 1.01$)، سپس، ماکزیمم نسبت بردار Y_0 در T تا $\varepsilon(X_0, Y_0) = 2\%$ افزایش می یابد (تا اولین درجه تقریب) (که متناظر با $\beta = 1.02$ است). به طور مشابه، اگر مولفه های بردار X_0 تا 1 درصد کاهش یابد، ماکزیمم نسبت بردار Y_0 تا $\varepsilon(X_0, Y_0) = 2\%$ کاهش می یابد ($\alpha = 0.99$ و $\beta = 0.98$).

پادینوسکی و فرساند (2010) اثبات کرده اند که تعریف کشش مقیاس فوق $\varepsilon(X_0, Y_0)$ که به طور موثر توسط بانکر 1984 و بانکر و ترال 1992 استفاده می شود معادل با تعریف استاندارد ارایه شده از حیث مشتقات جزء به جزء تابع تولید $\Phi(X, Y)$ (هانچ 1970، پانزار و ولینیک 1977) می باشد و T به آسانی در همه خروجی ها با تعریف از طریق مفهوم درجات محلی همگنی h (پانزار و ولینگ 1977، استارت 1977) قابل عرضه است.

پرواضح است که برای فناوری های تولید محدب عمومی، تابع $\bar{\beta}(\alpha)$ نمی تواند مشتق پذیر باشد و مفهوم اقتصادی استاندارد کشش مقیاس (3) تغییر نمی شود. به طور اخص، این تعریف قابل نعمیم به فناوری VRS نیست.

این مسئله را می توان با معرفی کششهای مقیاس یک طرفه $\varepsilon^+(X_0, Y_0)$ و $\varepsilon^-(X_0, Y_0)$ ارزیابی شده در DMU_0 که با مشتقات یک طرفه $\beta'_+(1)$ و $\beta'_-(1)$ متناظر است حل کرد.

برای فناوری VRS متعارف، این رویکرد توسط بانکر و ترال 1992 ارائه شده و توسط فاکویاما (2000)، هدیگاستاس و استورسیو (2006)، پادینوسکی، فورساند و کرینسازکو (2009)، پادینوسکی و فارساند (2010) و زلینک (2003) کشف شده است. این رویکرد قابل تعمیم به دسته کل فناوری های چند وجهی توسط پادینوسکی و همکاران (2016) است.

چون، همان طور که در بالا نشان داده شده است، مشتقات یک طرفه تابع $\beta(\alpha)$ در مورد فناوری های تولید بسته به خوبی تعریف می شوند و تعریف کشش های مقیاس یک طرفه بر اساس آن ها می تواند ساده باشد.

فرض کنید که T فناوری محدب بسته باشد و فرض کنید که $DMU(X_0, Y_0) \in T$ مطابق با فرض 1 است.

تعریف 1: کشش های مقیاس یک طرفه در $DMU(X_0, Y_0)$ در زیر تعریف شده است

$$\begin{aligned}\varepsilon^+(X_0, Y_0) &= \beta'_+(1), \\ \varepsilon^-(X_0, Y_0) &= \beta'_-(1).\end{aligned}$$

توجه داشته باشید که نامساوی میانی در (2) به صورت زیر است

$$\varepsilon^+(X_0, Y_0) \leq \varepsilon^-(X_0, Y_0).$$

اگر $\varepsilon^+(X_0, Y_0) = \varepsilon^-(X_0, Y_0)$ (یا به طور معادل $\beta'_+(1) = \beta'_-(1)$) و تابع $\beta(\alpha)$ در $\alpha = 1$ مشتق پذیر

است، از این روی داریم $\varepsilon(X_0, Y_0) = \varepsilon^+(X_0, Y_0) = \varepsilon^-(X_0, Y_0)$

اگر $\varepsilon^+(X_0, Y_0) < \varepsilon^-(X_0, Y_0)$ باشد، کشش مقیاس (کشش پاسخ بردار خروجی Y_0 به تغییرات حاشیه ای بردار

ورودی X_0) متفاوت است اگر بردار X_0 به طور متناسب افزایش یا کاهش می یابد. برای مثال، فرض کنید که

$\varepsilon^+(X_0, Y_0) = 0.5$ و $\varepsilon^-(X_0, Y_0) = 1.5$ باشد. از این روی اگر بردار ورودی X_0 به طور متناسب با 1 درصد

افزایش یابد، ماکزیمم نسبت احتمالی بردار Y_0 تا $\varepsilon^+(X_0, Y_0) = 0.5\%$ افزایش می یابد. از سوی دیگر، اگر بردار

X_0 تا 1 درصد کاهش یابد، ماکزیمم نسبت Y_0 تا $\varepsilon^-(X_0, Y_0) = 1.5\%$ کاهش می یابد.

تبصره 2: دور روش معادل مناسب برای محاسبه کشش مقیاس یک طرفه در هر $DMU (X_0, Y_0)$ وجود دارد. اولاً، همان طور که در تبصره 1 نشان داده شده است، اگر فناوری T چند وجهی است، مشتقات یک طرفه $\bar{\beta}'_+(1)$ و $\bar{\beta}'_-(1)$ و از این روی کشش مقیاس یک طرفه $\varepsilon^+(X_0, Y_0)$ و $\varepsilon^-(X_0, Y_0)$ است که با استفاده از رویکرد برنامه نویسی خطی پادینوسکی و همکاران 2016 محاسبه می شود.

دوماً، منابع نشان می دهد که اگر T ، فناوری VRS بانکر و همکاران 1984 باشد، این کشش های یک طرفه را می توان به صورت زیر تعریف شود

$$\begin{aligned} \varepsilon^+(X_0, Y_0) &= 1 - \omega^{\max}, \\ \varepsilon^-(X_0, Y_0) &= 1 - \omega^{\min}, \end{aligned} \quad (4)$$

که ω^{\max} و ω^{\min} به ترتیب، ماکزیمم و مینیمم متغیر آزاد ω دوبرابر مساوی $1^T \lambda = 1$ است که در مجموعه ای از راه حل های بهینه با مدل VRS ضریب خروجی قرار دارد (فارساند و هاجلمرسون 2004). فرمول مشابه با 4 از حیث متغیر ω ارایه می شود که در مدل VRS ورودی محور محاسبه می شود (فارساند و هاجلمرسون 2004، پادینوسکی و همکاران 2009، زیلینوک 2013). پدینوسکی و همکاران (2016) فرمول 4 و انالوگ آن را بر اساس مدل ورودی محور به فناوری چند وجهی نسبت داده است. ما از فرمول 4 برای محاسبه کشش مقیاس یک طرفه در مثال بخش 8 استفاده می کنیم

4- بازده نسبت به مقیاس

بر طبق تعریف استاندارد (به فارساند و هاجلمرسون 2004 مراجعه کنید)، نوع RTS نشان داده شده با $DMU (X_0, Y_0)$ خروجی کارآمد با کشش مقیاس ارزیابی شده در این DMU تعریف می شود. به طور ویژه $DMU (X_0, Y_0)$ افزایش، کاهش یا ثابت RTS (IRS, DRS or CRS) را می دهد اگر $\varepsilon(X_0, Y_0) < 1$ ، $\varepsilon(X_0, Y_0) > 1$ ، یا $\varepsilon(X_0, Y_0) = 1$ باشد

بانکر و ترال (1992) این تعریف را به فناوری VRS با استفاده از کشش های مقیاس یک طرفه تعمیم داده اند (بانکر و همکاران 2011). پادینوسکی و همکاران 2016 رویکرد بانکر و ترال (1992) را به فناوری های چند وجهی توسعه داده اند. به علاوه تعمیم به هر فناوری محدب بسته نیز راحت است.

فرض کنید که T فناوری محدب بسته باشد و $DMU (X_0, Y_0) \in T$ مطابق با فرض 1 باشد.

تعریف 2: $DMU(X_0, Y_0)$ شرایط زیر را نشان می دهد

- IRS، اگر $1 < \varepsilon^+(X_0, Y_0) \leq \varepsilon^-(X_0, Y_0)$ باشد

- DRS اگر $\varepsilon^+(X_0, Y_0) < \varepsilon^-(X_0, Y_0) < 1$ باشد

- CRS اگر $\varepsilon^+(X_0, Y_0) \leq 1 \leq \varepsilon^-(X_0, Y_0)$ باشد

چندین تبصره با توجه به تعریف فوق را می توان بیان کرد. اولاً، انواع IRS و DRS به طور مفهومی مطابق با تعریف استاندارد RTS است که اگر کشش مقیاس $\varepsilon(X_0, Y_0)$ وجود داشته باشد، قابل تعمیم خواهد بود. برای مثال، مورد IRS در تعریف 2 را در نظر بگیرید. اگرچه کشش پاسخ بردار خروجی Y_0 به تغییرات حاشیه ای بردار ورودی X_0 به طور کلی در مورد بردار X_0 افزایشی یا کاهششی، متفاوت است هر دو شاخص $\varepsilon^+(X_0, Y_0)$ و $\varepsilon^-(X_0, Y_0)$ بزرگ تر از 1 است. از این روی در هر دو مورد، تغییر متناسب منفی یا مثبت با بردار Y_0 بزرگ تر از تغییر بردار X_0 است. به طور مشابه در مورد DRS، تغییر متناسب با بردار Y_0 توصیف شده با $\varepsilon^+(X_0, Y_0)$ و $\varepsilon^-(X_0, Y_0)$ کم تر از تغییر بردار X_0 است. دوماً، در مورد CRS در تعریف 2، DRS در صورتی وجود دارد که اگر بردار X_0 به طور حاشیه‌ای افزایش یابد و IRS در صورتی وجود دارد که X_0 کاهش می یابد. این البته یک مفهوم استاندارد از CRS نیست که مستلزم این است کشش مقیاس برابر با 1 است ولی این طبقه بندی را می توان به طور مناسب در منابع دید (بانکر و همکاران 2011، بانکر و ترال 1992). به علاوه در زیر اثبات شده است که در این صورت $DMU(X_0, Y_0)$ ، ماکزیمم بهره وری در حوزه Γ را بدست می آورد. مورد اخیر متناسب با نوع CRS استاندارد است.

سوم، فرض کنید که بردار X_0 به طور متناسب در فناوری T کاهش نیابد (برای مثال، این وضعیت در محاسبات کشش مقیاس در فناوری VRS حادث میشود). در این مورد، $\alpha = 1$ نقطه اکسترم چپ بازه Γ و مشتق سمت چپ $\beta'_-(1)$ تعریف نشده است. همان طور که در بالا گفته شد، در این صورت می توان $\beta'_-(1) = +\infty$ و $\varepsilon^-(X_0, Y_0) = +\infty$ را تعریف کرد. بر طبق تعریف 2 این بدین معنی است که $DMU(X_0, Y_0)$ که بردار X_0 آن ها را نمی توان به طور متناسب در T کاهش داد، قادر به نشان دادن DRS نیست. به علاوه، این که آیا $DMU(X_0, Y_0)$ نشان دهنده IRS یا DRS است بستگی کامل به کشش مقیاس سمت راست $\varepsilon^+(X_0, Y_0)$

دارد. یک مشاهده مشابه در صورتی قابل تعمیم است که بردار X_0 به طور مناسب در T افزایش نمی یابد) اگرچه این احتمال ازدیدگاه نظری جالب است زیرا اگر T در همه ورودی ها قابل عرضه نباشد حادث شده و به صورت نرمال فرض می شود).

تبصره 3: همان طور که در تبصره 2 نشان داده شده است اگر T فناوری VRS باشد، تعریف 2 را می توان از حیث ماکزیمم و مینیمم مقادیر ω^{\min} و ω^{\max} متغیر ω در مدل VRS خروجی گرا با استفاده از معادله (4) و از حیث ω ارزیابی شده در مدل ورودی گرا (سخو و همکاران 2015) بیان کرد. یک بازنویسی مشابه در صورتی امکان پذیر است که T یک فناور یچند وجهی باشد (پادینوسکیو همکاران 2016)

تبصره 4: پر واضح است که شکل مرز تولید و کشش های مقیاس یک طرفه که مشخص کننده بخش های مختلف است، به طور کلی به مجموعه ای از DMU های مشاهده شده حساس است. برای فناوری VRS استاندارد بانکر و همکاران 1984، پادیوسنکی و فارسند 2010، اثبات کرده اند که اگر DMU بیشتری به نمونه افزوده شود و DMU_0 در فناوری VRS نمونه جدید شعاعی کارآمد باشند سپس کشش مقیاس سمت چپ $\varepsilon^-(X_0, Y_0)$ نمی تواند افزایش یابد در حالی که کشش مقیاس سمت راست $\varepsilon^+(X_0, Y_0)$ نمی تواند افزایش یابد. این نشان می دهد که بازه $[\varepsilon^+(X_0, Y_0), \varepsilon^-(X_0, Y_0)]$ زمانی باریکتر می شود که DMU بیشتر به نمونه افزوده شود. با تعریف 2، این بدین معنی است که DMU_0 نشان دهنده IRS در یک کلاس یکسان باقی می ماند اگر نمونه بزرگ تر شود. به طور مشابه، DMU_0 نشان دهنده DRS، DRS را در یک نمونه بزرگ تر نشان می دهد. با این حال DMU_0 نشان دهنده CRS می تواند سه نوع RTS را در نمونه بزرگتر نشان دهد.

5- بیشترین مقیاس بهره وری

هر فناوری تولید (نه لزوماً محدب) T را در نظر بگیرید. بر طبق تعریف ارائه شده توسط بانکر (1984)، یک $(X_0, Y_0) \in T$ DMU در MPSS قرار دارد اگر به ازای همه DMU در شکل $(\alpha X_0, \beta Y_0) \in T$ باشد که $\alpha > 0$ است و از این روی داریم $\beta/\alpha \leq 1$. به این ترتیب، بر اساس گزارش بانکر 1984، $DMU(X_0, Y_0)$ در صورتی در MPSS قرار دارد که مقدار بهینه برنامه زیر برابر با 1 باشد

$$\begin{aligned} \max & \quad \beta/\alpha \\ \text{s.t.} & \quad (\alpha X_0, \beta Y_0) \in \mathcal{T}, \\ & \quad \alpha, \beta > 0. \end{aligned} \quad (5)$$

به طور مشابه، اگر $DMU(X_0, Y_0)$ در MPSS باشد، یک خروجی کارآمد شعاعی بوده و مطابق با فرض 1 است

برنامه (5) را می توان با معرفی نسخه مخروطی مرجع \mathcal{T}^* به فناوری ساده سازی کرد

$$\mathcal{T}^* = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^{m+s} \mid \exists (\tilde{X}, \tilde{Y}) \in \mathcal{T}, \delta \geq 0 : (X, Y) = \delta(\tilde{X}, \tilde{Y})\}.$$

توجه کنید که مقدار بهینه (5) تغییر نمی کند اگر ما \mathcal{T} را با \mathcal{T}^* در قیود آن جایگزین کنیم. امکان نرمال

سازی راه حل های ممکن با برابر قرار دادن $\alpha = 1$ و حذف شرایط غیر منفی در متغیرهای α و β به صورت

افزونه وجود دارد. از این روی، مقدار بهینه برنامه 5 معادل با مقدار بهینه برنامه زیر است

$$\begin{aligned} \max & \quad \beta \\ \text{s.t.} & \quad (X_0, \beta Y_0) \in \mathcal{T}^*. \end{aligned} \quad (6)$$

برنامه 6 کارایی شعاعی خروجی $DMU(X_0, Y_0)$ را در فناوری \mathcal{T}^* اندازه گیری می کند. از این روی،

در صورتی در $DMU(X_0, Y_0)$ MPSS است که اگر و تنها اگر خروجی شعاعی کارآمد در فناوری \mathcal{T}^* تولید شده

با \mathcal{T} باشد. اگر فناوری VRS بانکر و همکاران 1984 است، برنامه 6، مدل CRS خروجی محور استاندارد چارنز و همکاران 1978 است.

6- بازده نسبت به مقیاس عمومی

مفهوم نسبت به مقیاس عمومی (GRS) توسط پادینوسکی (2004 الف) معرفی شد، پادینوسکی (2004 ب)،

تحت فرضیات ضعیف در مورد فناوری تولید \mathcal{T} ، که مورد دوم امکان تولید آزاد و نامحدود را نمی دهد. سایر

فرضیات در مورد \mathcal{T} نیاز نیست، برای مثال \mathcal{T} نباید لزوماً بر طبق هر تعریف قابل عرضه و محدب و یا بسته باشد.

انواع GRS شاخص جهت هستند که در آن اندازه عملیات DMU0 بایستی تغییر کند، اگرچه به MPSS خود

می رسند. برای بیان رسمی و بر اساس مطالعه پادینوسکی (2004 الف)، فرض کنید که $\mathcal{T} \in \mathbb{R}_+^{m+s}$ می تواند

هر فناوری ای باشد که امکان تولید نامحدود و آزاد را نمی دهد و فرض کنید که $DMU(X_0, Y_0) \in \mathcal{T}$ شرایط

فرض 1 را داشته باشد.

فرض کنید که مقدار بهینه برنامه (5) در $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ حاصل می شود. $DMU(\hat{\alpha}X_0, \hat{\beta}Y_0)$ در MPSS است. پادینوسکی 2004 الف، پادینوسکی 2004 این DMU را به صورت واحد مرجع مقیاس SRU از $DMU(X_0, Y_0)$ می داند.

در صورتی که $DMU(X_0, Y_0)$ در MPSS باشد، انگاه $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = 1$ یک راه حل بهینه برای (5) است و $(\hat{\alpha}X_0, \hat{\beta}Y_0) = (X_0, Y_0)$ است. در غیر این صورت DMU_0 یا کوچک تر از $(\hat{\alpha}X_0, \hat{\beta}Y_0)$ (if $\hat{\alpha}, \hat{\beta} > 1$) SRU است یا DMU_n بزرگ تر از $(\hat{\alpha}X_0, \hat{\beta}Y_0)$ (if $\hat{\alpha}, \hat{\beta} < 1$) SRU است. احتمال دارد که برنامه 5 دارای راه حل های بهینه چند گانه بوده و هر یک یک SRU متفاوت از DMU_n را تعریف می کند. در این صورت احتمال دارد که DMU_n کوچک تر از مقداری از SRU و بزرگ تر از دیگری باشد.

تعریف 3- پادینوسکی (2004 الف): $DMU(X_0, Y_0)$ موارد زیر را نشان می دهد

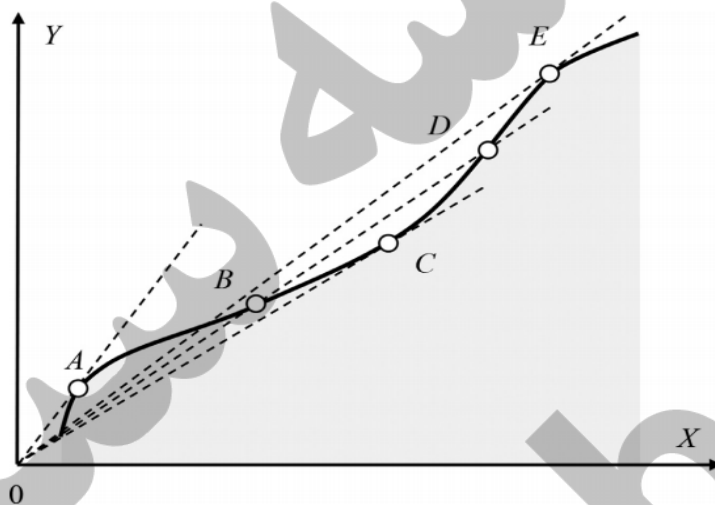
G-CRS	G-CRS	عمومی اگر DMU_n در MPSS باشد
G-CRS	IRS (G-IRS)	عمومی اگر همه SRU آن بزرگ تر از DMU_n باشد
G-CRS	DRS (G-DRS)	عمومی اگر همه SRU کوچک تر از DMU_0 باشد
G-CRS	CRS (G-SCRS)	نیمه ثابت عمومی اگر بخری از SRU ها کوچک تر و برخی بزرگ تر از DMU_0 باشند

با این حال DMU_0 در MPSS قرار ندارد

به طور کلی، برنامه موردی (5) ممکن است فاقد راه حل بهینه باشد و مقدار حداکثر قابل حصول نیست. در نتیجه یک SRU از DMU_0 وجود ندارد. در این صورت، (پادینوسکی 2004 الف) مفهوم تقریبی $Sru =$ موسوم به ϵ - SRU را معرفی کرده و تعریف 3 را در مورد خیر باز تعریف می کند.

پادینوسکی (2004 الف) نشان می دهد که نوع GRS نشان داده شده با DMU_n را می توان با ارزیابی کارایی شعاعی خروجی آن در فناوری T و دو فناوری مرجع یعنی در فناوری های بازده به مقیاس غیر افزایشی و غیر کاهششی تست کرد. چهار نوع GRS با چهار احتمال منطقی ناشی از مقایسه کارایی های DMU_n در سه فناوری متناظر است.

لازم به ذکر است که ویژگی های محلی و جهانی RTS از نظر مهمی متفاوت می باشند. شناسایی محلی RTS بر اساس مفهوم کشش مقیاس است. به شرط یکنواخت بودن مرز کارآمد، کشش مقیاس یک مشتقی است که در DMU_0 ارزیابی می شود. این مشتق بستگی به تنها همسایه های کوچک حاشیه ای و یا DMU_0 و یا بر روی همسایه کوچک $\alpha = 1$ دارد. از این روی، نوع RTS نشان دهنده جهتی است که DMU_0 بایستی بهبودحاشیه ای فوری بهره وری آن را در نظر میگیرد. برای مثال، اگر DMU_0 یک IRS را نشان دهد، بهره وری آن در صورتی افزایش می یابد که DMU_0 موجب افزایش مقیاس عملیات آن در نسبت کم شود.



شکل 1: تفاوت بین ویژگی های RTS عمومی و محلی در فناوری غیر محدب

بر عکس، انواع GRS ویژگی های عمومی هستند. آن ها جهتی را نشان می دهند که در آن DMU_0 بایستی تغییرات مقیاس عملیات را به سمت MPSS اعمال کند حتی اگر در جهت شناسایی شده در مراحل منجر به آسیب به بهره وری شود.

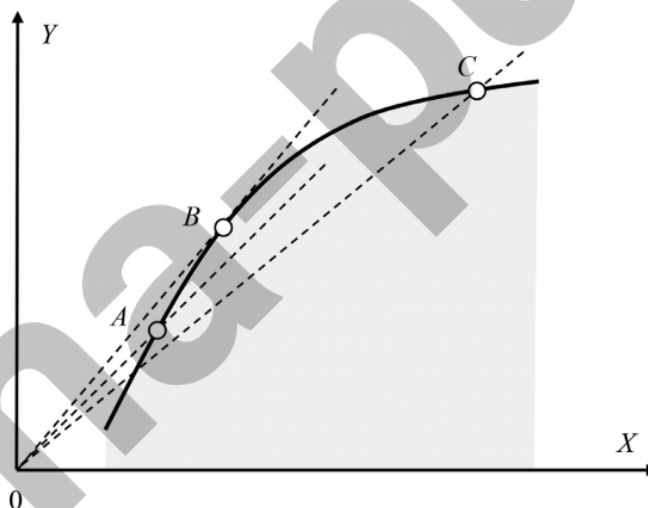
برای مثال، فناوری غیرمحدب را با یک ورودی X و یک خروجی Y نشان داده شده در سطح هاشور خورده شکل 1 در نظر بگیرید. توجه کنید که DMU_{A-C-E} نشان دهنده CRS محلی، DMU_B نشان دهنده DRS محلی و DMU_D نشان دهنده IRS محلی است. از دیدگاه جهانی، DMU_A دارای بالاترین سنیت خروجی به ورودی است و تنها DMU است که در MPSS قرار دارد. به این ترتیب، DMU_A GPCRS را نشان می دهد. سه $DMU_{B-C-D-E}$ را نشان می دهد که بزرگ تر از A باشد و از این روی همه G-DRS را نشان می دهد.

لازم به تاکید است که شناسایی محلی RTS تنها برای فناوری های تولید غیر محدب و محدب یکنواخت تعریف می شود و برای تعریف کشش مقیاس یا اتالوگ های یک طرفه نیاز است. بر عکس، شناسایی کلی GRS نیازمند این نیست که فناوری یکنواخت باشد. برای مثال، مفهوم GRS برای شناسایی DMU در مدل لایه دسترس آزاد (FDH) قابل تعمیم است (دپرین و همکاران 1984).

7- تعادل ویژگیهای محلی و جهانی RTS

همان طور که در فناوری دلخواه گفته شد، ویژگی های RTS و GRS به طور کلی متفاوت هستند. با این حال بر اساس پادینوسکی (2004 الف) (قضیه 7)، اگر فناوری T بسته و محدب باشد و مرز آن به اندازه کافی یکنواخت باشد، دو ویژگی معادل هستند. به طور دقیق تر در این صورت، بر اساس فرضیه 1، هر DMU، G-CRS، G-IRS و G-DRS را نشان می دهد اگر و تنها اگر CRS، IRS و DRS را نشان دهد. در این صورت، نوع G-SCRS غیر ممکن است.

برای مثال، فناوری محدب نشان داده شده به صورت بخش هاشور خورده در شکل 2 را در نظر بگیرید. توجه کنید که DMUB، CRS را نشان داده و در MPSS قرار دارد. DMUA، IRS را نشان داده و موجب افزایش عملیات برای دست یابی به MPSS در B می شود. از این روی A، G-IRS را نشان می دهد و به طور مشابه DMU C، DRC و G-DRS را نشان می دهد.



شکل 2: تعادل ویژگی های محلی و عمومی در یک فناوری محدب

یک نتیجه مرتبط توسط بانکر، چانک و کوپر 1996 بیان می دارد که ویژگی های RTS-GRS در فناوری VRS معادل هستند که غیر یکنواخت است. توسعه اخیر فناوری های چند وجهی مختلف موجب بروز این سوال می شود که آیا تعادل انواع متناظر RTS-GRS را می توان از مورد VRS به هر یک از این فناوری ها تعمیم داد. در زیر می توان اثبات کرد که پاسخ فوق مثبت باشد و این نتیجه نه تنها برای فناوری چند وجهی، بلکه برای یک دسته بزرگ تری از فناوری های محدب بسته صادق است.

فرض کنید که T یک فناوری محدب بسته باشد و $DMU_0 \in T$ شرایط فرض 1 را داشته باشد.

قضیه 1: DMU_0 G-CRS, G-IRS یا G-DRS را نشان می دهد اگر و تنها اگر CRS، IRS و drs را به ترتیب نشان دهد. نوع G-SCRS غیر ممکن است.

نتیجه فرعی: DMU_0 در MPSS است اگر و تنها اگر CRS را نشان دهد

تعادل و هم ارزی MPSS و نوع RTS CRS بیان شده در نتیجه فرعی 1 در مورد فناوری VRS شناخته می شود (بانکر و ترال 1992). این بدین معنی است که در فناوری VRS، می توان MPSS را با استفاده از دو روش تست کرد. اولاً می توان تایید کرد که آیا کارایی شعاعی خروجی DMU_0 در فناوری CRS معادل با 1 باشد، یا خیر. دوم می توان تایید کرد که آیا DMU_0 یک CRS را با محاسبه کشش مقیاس یک طرفه $\varepsilon^+(X_0, Y_0)$ و $\varepsilon^-(X_0, Y_0)$ و به طور معادل با مقادیر ماکزیمم و مینیمم ω^{\max} و ω^{\min} نشان می دهد که در بخش 4 نشان داده می شود.

نتیجه فرعی نشان می دهد که ما دو گزینه را در هر فناوری محدب بسته داریم (از همه مهم تر در فناوری چند وجهی). به ویژه به جای حل برنامه (6)، می توان MPSS را با ارزیابی کشش مقیاس یک طرفه در DMU_0 تست کرد. اگر T یک فناوری چند وجهی باشد، رویکرد دوم از نظر محاسباتی ساده است و نیازمند حل دو برنامه خطی است. با این حال برای حل برنامه (6)، ما بایستی یک تعریف عملیاتی از فناوری مرجع T^* را داشته باشیم. تعریف T^* یک کار ساده نیست و نیازمند تحقیقات بیشتر است. این وضعیت در مثال عددی در بخش بعد نشان داده شده است.

به علاوه، همان طور که در بخش 6 نشان داده شده است، تست انواع GRS مستلزم ارزیابی کارایی شعاعی خروجی DMUO در فناوری های NIRS و NDRS تولید شده با T می باشد و این فناوری ها می توانند قابل دسترس باشند. با این حال، بر اساس قضیه 1، می توان انواع RTS را تست کرد. همان طور که گفته شد اگر T فناوری چند وجهی باشد، این کار ساده خواهد بود.

8- مثال عددی

قضیه 1 تعادل ویژگی های محلی و کلی RTS را در فناوری محدب بسته T اثبات می کند. در این بخش، ما این نتیجه را با یک مثالی نشان می دهیم که در بر گیرنده توسعه فناوری VRS با محدودیت های وزنی است. مدل تحلیل پوششی داده ها بر اساس این فناوری ها در منابع اثبات شده است (الن، اتانساپولوس، دیسون و تانسالیوس 1996، دیسون و تنسلیوس 1988، پودینوسکی 2004، 2005، 2016، تانسلیوس، پرتلا و الن 2004).

1-8 چارچوب نظری

فرض کنید که DMU ها، (X_j, Y_j) ، $j = 1, \dots, n$ باشند که $X_j \in \mathbb{R}_+^m$ و $Y_j \in \mathbb{R}_+^s$ بردار های به ترتیب ورودی و خروجی هستند. به طور اخص، ارزیابی کارایی شعاعی خروجی DMUO را با مدل VRS در نظر بگیرید. این مدل از حیث بردار های متغیر اوزان ورودی و خروجی $v \in \mathbb{R}_+^m$ و $u \in \mathbb{R}_+^s$ به ترتیب بیان می شود. محدودیت های وزنی محدودیت های اضافی وارده بر اوزان ورودی و خروجی در مدل مضرب است. فرض کنید که K محدودیت وزنی همگن وجود داشته باشد که به صورت زیر بیان می شود

$$v^T P_t - u^T Q_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, K. \quad (7)$$

کارایی شعاعی خروجی DMUO معکوس مقدار بهینه η^* برنامه زیر است

$$\begin{aligned} \eta^* = \min & \quad v^T X_o + \omega \\ \text{subject to} & \quad u^T Y_o = 1, \\ & \quad v^T X_j - u^T Y_j + \omega \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & \quad v^T P_t - u^T Q_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, K, \\ & \quad u, v \geq 0, \quad \omega \text{ sign free.} \end{aligned} \quad (8)$$

با دو برابر کردن برنامه (8)، مدل پوششی خروجی به صورت زیر بدست می آید

$$\eta^* = \max$$

منوط به این که

$$\begin{aligned} \eta \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j + \sum_{t=1}^K \pi_t P_t &\leq X_o, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j + \sum_{t=1}^K \pi_t Q_t &\geq \eta Y_o, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1, \\ \lambda, \pi &\geq 0, \quad \eta \text{ sign free,} \end{aligned} \quad (9)$$

می باشد. که بردار $\pi \in \mathbb{R}_+^K$ دو برابر محدودیت های وزنی در (8) است. مشاهده می شود که مدل پوششی (9)

شامل دو جمله تولید شده با محدودیت های وزنی در مدل مضربی (8) است

$$(P_t, Q_t), \quad t = 1, \dots, K. \quad (10)$$

این عبارت ها که در نسبت های متغیر $\pi_t \geq 0$ استفاده می شود، DMU در مدل VRS استاندارد با عبارت های اول قیود برنامه (9) نشان داده می شود. بر اساس مطالعه پادینوسکی (2004 ب)، عبارت (10) به صورت توازن تولید بین ورودی و خروجی قابل تفسیر است. این نشان می دهد که برنامه پوششی (9)، کارایی شعاع خروجی DMU را در فناوری VRS توسعه یافته با توازن تولید ارزیابی می کند (10). به طور دقیق تر، این فناوری به صورت زیر تعریف می شود

جدول 1: مجموعه داده ها در مثال

	Input 1	Input 2	Input 3	Output 1	Output 2
DMU 1	2	2	3	2	1
DMU 2	4	4	3	4	3
DMU 3	6	4	5	3	2
DMU 4	2	3	3	3	4
DMU 5	6	5	4	4	5

تعریف 4) پادینوسکی (2004 ب): فناوری VRS با توازن تولید T_{VRS-TO} مجموعه همه DMU غیر منفی

است که برای آن بردار های شدت $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ ، $\pi \in \mathbb{R}_+^K$ و بردار کمکی $d \in \mathbb{R}_+^m$ و $(X, Y) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^s$

$e \in \mathbb{R}_+^s$ وجود داشته باشد

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j X_j + \sum_{t=1}^K \pi_t P_t + d = X, \quad (11a)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j + \sum_{t=1}^K \pi_t Q_t - e = Y, \quad (11b)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1. \quad (11c)$$

فناوری T_{VRS-TO} یک مجموعه چند وجهی است و از این روی فناوری محدب است (پودینوسکی 2015).

تبصره 5: بدیهی است که قرار دادن محدودیت های وزن (7) در مدل مضرب (8) می تواند منجر به امکان ناپذیری و یاب طور معادل، راه حل نامحئود نسبت به مدل پوششی دوگانه آن شود (9). پادینوسکی و بادزین-چماوا (2013)، پادینوسکی و بادزین و چماوا (2015) این محدودیت های وزنی را به صورت ناپیوسته و متناقض در نظر گرفته اند. آن ها نشان داده اند که محدودیت های وزنی متناقض منجر به تولید آزاد یا نامحدود از بردار های خروجی در فناوری T_{VRS-TO} می شوند. به علاوه، امکان دارد که محدودیت های وزنی متناقض باشند حتی اگر به ازای همه DMU های مشاهده شده، مدل مضرب متناظر (8) امکان پذیر باشد و امتیازات کارایی محاسبه شده، بدون مسئله باشند. پادینوسکی و بادزین-چاموف (2013)، پادینوسکی و بادزین-چاموف (2015) شرایط کارآمد و ضروری ساده و روش های محاسباتی ساده را برای تایید پایداری محدودیت های وزنی توسعه داده اند (7).

در زیر می توان فرض کرد که محدودیت های وزنی (7) پیوسته و نامتناقض هستند. تحت این فرضیه، هر دو مدل مضرب و پوششی (8-9) دارای راه حل بهینه متناهی η^* به ازای DMU_0 در فناوری T_{VRS-TO} می باشند به

شرط این که $Y_0 \neq 0$

2-8 مجموعه داده ها و کارایی شعاعی خروجی

مجموعه داده ها در جدول 1، 5 DMU ارزیابی شده بر روی سه ورودی و 2 خروجی را نشان می دهد. فرض کنید که v_1, v_2 و v_3 اوزان ورودی بوده و u_1 و u_2 اوزان خروجی هستند. ارزیابی کارایی شعاعی خروجی پنج DMU را با استفاده از مدل VRS با محدودیت های وزنی اضافی در نظر بگیرید که یک مورد ویژه از (7) است

$$\begin{aligned}
 v_1 - v_2 &\geq 0, \\
 -v_1 + 2v_2 &\geq 0, \\
 -2u_1 + 3u_2 &\geq 0, \\
 v_3 - 2u_2 &\geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

جدول 2: کشش مقیاس یک طرفه ε^+ و ε^- و انواع RTS محلی DMU های کارآمد شعاعی خروجی

	ω^{\min}	ω^{\max}	ε^-	ε^+	Type of RTS
DMU 1	$-\infty$	-5	$+\infty$	6	IRS
DMU 2	$-\infty$	0.3333	$+\infty$	0.6667	CRS
DMU 4	$-\infty$	0.2118	$+\infty$	0.7882	CRS
DMU 5	0.1111	0.2727	0.8889	0.7273	DRS

کارایی شعاعی خروجی هر DMU را می توان با حل مدل مضرب (8) یا مدل پوشش دوگانه (9) ارزیابی کرد. محاسبات نشان می دهند که چهار مورد از پنج DMU (همه به جز DMU3) خروجی کارآمد شعاعی هستند. همه چهار DMU مکان شناسایی محلی و جهانی RTS را می دهد.

کارایی شعاعی خروجی DMU 3 برابر با 0.5 است. از این روی DMU3 منطبق بر فرض 1 نیست. و مفاهیم RTS محلی و جهانی در این DMU تعریف نشده است

RTS 3-8 محلی

همان طور که در تبصره 2 گفته شد، کشش مقیاس سمت چپ و سمت راست ε^- و ε^+ ارزیابی شده در هر DMU کارآمد شعاعی خروجی را می توان با فرمول 4 محاسبه کرد. برای همین منظور باید مقادیر بهینه اکسترم ω^{\max} و ω^{\min} از متغیر علامت ازاد ω در مدل ضریب محاسبه شوند. این کار ساده بوده و نیازمند حل دو برنامه خطی برای هر DMU0 است که در پیوست ب نشان داده شده است.

جدول 2 مقادیر ω^{\max} و ω^{\min} و کشش های مقیاس یک طرفه متناظر ارزیابی شده در چهار DMU کارآمد شعاعی خروجی را نشان می دهد. بر اساس تعریف 2، DMU1، DMU2، IRS، DMU2 و 4، نشان دهنده CRS بوده و DMU5، DRS را نشان می دهد.

ویژگی RTS بدست آمده بر اساس تعریف محلی است یعنی انواع RTS نشان دهنده نسبتی هستند که در آن بردار خروجی Y_0 از DMU0 با تغییرات تناسبی حاشیه ای بردار ورودی X_0 متناظر است به شرط این که DMU

از نظر خروجی شعاعی کارآمد است. برای مثال، DMU5، DRS را نشان می دهد و کشش مقیاس سمت راست ارزیابی شده در این DMU معادل با 0.7273 است. این نشان می دهد که اگر بردار ورودی در نسبت کم افزایش یابد، یعنی تا 1 درصد، بردار خروجی نیز تا 0.7273 درصد افزایش می یابد. اگر بردار ورودی این DMU تا 1 درصد کاهش یابد، بردار خروجی تا 0.8889 درصد کاهش می یابد

4-8 RTS جهانی (کلی)

سوال مربوطه به صورت زیر است: آیا انواع RTS محلی بحث شده در بالا (که در جدول 2 نشان داده شده است) شاخص و نشان دهنده جهت MPSS برای چهار DMU کارآمد از نظر خروجی می باشد یعنی، ویژگی کلی RTS مشابه با ویژگی محلی است؟

در VRS استاندارد، مدل بدون محدودیت های وزنی اضافی، پاسخ این سوال با فرض 1 در بانگر (1984) مثبت است. برای مثال، در فناوری VRS استاندارد (بدون محدودیت های وزنی)، نوع IRS نشان می دهد که DMU بایستی مقیاس عملیات آن را برای دست یابی به MPSS افزایش دهد. در صورتی که یک DMU، GRS را نشان دهد، می توان گفت که در MPSS قرار دارد. از سوی دیگر، این تناظر ساده بین ویژگی های محلی و جهانی در صورتی تجزیه می شود که فناوری غیر محذب باشد (پادینوسکی 2004 الف).

قضیه 1 پاسخ مثبتی را به سوال بیان شده می دهد. همان طوری که گفته شد، فناوری VRS با محدودیت های وزنی، یک فناوری محذب است. بر طبق قضیه 1، ویژگی RTS محلی DMU های خروجی کارآمد در جدول 2، مطابق با ویژگی جهانی است. به طور کلی چون DMU1، IRS محلی را نشان می دهد، G-IRS را نیز نشان داده و موجب افزایش مقیاس عملیات برای دست یابی به MPSS می شود. DRS DMU5 محلی و از این روی G-DRS را نشان می دهد و برای دست یابی به MPSS، مقیاس آن کاهش می یابد. DMU2 و DMU4، GRS را نشان داده و از این روی در MPSS مربوطه قرار دارند.

5-8 ارزیابی مستقیم GRS

با در نظر گرفتن قضیه 1، می تواند اکنون تحقیق را متوقف کرد زیرا هر دو ویژگی های محلی و جهانی RTS بدست آمده اند. با این حال، برای شفاف تر شدن مسئله، در زیر نشان می دهیم که چگونه می توان به طور مستقیم انواع RTS جهانی را شناسایی کرد. این ارزیابی (و شناسایی -DMU در MPSS) نیازمند محاسبات اضافی

با استفاده از ایده روش فناوری مرجع است (فار و همکاران 1983). یک نسخه از این مدل تعدیل شده برای تست انواع GRS در فناوری دلخواه، در پادینوسگگی 2004 الف توسعه یافت. این روش بستگی به ارزیابی کارایی شعاعی خروجی DMU0 در فناوری های NIRS و NDRS تولید شده با فناوری واقعی و در مثال T_{VRS-TO} دارد. بر اساس مرور منابع انجام شده، منابع تحلیل پوششی داده ها، فناوری های NIRS و ndrs تولید شده توسط فناوری T_{VRS-TO} را توصیف نمی کنند. فرض کنید که C ، H و G به صورت فناوری های NIRS- CSR NDRS تولید شده توسط فناوری T_{VRS-TO} باشند. به طور دقیق تر داریم

$$\begin{aligned} C &= \{(X, Y) \in \mathbb{R}^{m+s} \mid \exists (X, Y) \in T_{VRS-TO}, \delta \geq 0 : (X, Y) \\ &= \delta(\tilde{X}, \tilde{Y})\}, \\ H &= \{(X, Y) \in \mathbb{R}^{m+s} \mid \exists (\tilde{X}, \tilde{Y}) \in T_{VRS-TO}, \delta \in [0, 1] : (X, Y) \\ &= \delta(\tilde{X}, \tilde{Y})\}, \\ G &= \{(X, Y) \in \mathbb{R}^{m+s} \mid \exists (\tilde{X}, \tilde{Y}) \in T_{VRS-TO}, \delta \geq 1 : (X, Y) \\ &= \delta(\tilde{X}, \tilde{Y})\}. \end{aligned} \quad (13)$$

در پیوست C، مثال هایی ارائه شده است که نشان می دهد که به طور کلی فناوری های H و C ممکن است مجموعه های بسته نباشند. فرض کنید که \bar{C} و \bar{H} به ترتیب بسته شدن فناوری های C و H باشند. اگر $cl(.)$ عملگر بستار باشد، نتیجه زیر بدست می آید

قضیه 2:

- 1- فناوری $\bar{C} = cl(C)$ با شرایط (11) توصیف می شود که از آن مساوی (11C) را می توان توصیف کرد
 - 2- فناوری $\bar{H} = cl(H)$ با شرایط (11) توصیف می شود که در آن مساوی (11C) به نامساوی " \leq " تغییر می یابد.
- جدول 3 کارایی شعاعی خروجی DMU در فناوری های مختلف که همگی از محدودیت های وزنی (12) و ویژگی های GRS آن ها استفاده می کنند. توجه کنید که DMU3 از نظر شعاع خروجی ناکارآمد است و نوع GRS آن تعریف نشده است.

	VRS	CRS	NIRS	NDRS	Type of GRS
DMU 1	1	0.5	0.5	1	G-IRS
DMU 2	1	1	1	1	G-CRS (MPSS)
DMU 3	0.5	0.45	0.5	0.45	Undefined
DMU 4	1	1	1	1	G-CRS (MPSS)
DMU 5	1	0.9643	1	0.9643	G-DRS

3- فناوری G بسته است و با شرایط 11 توصیف می شود که در آن مساوی (11C) به نامساوی " \geq " تغییر می کند

گزاره 2: کارایی شعاعی خروجی $DMU_0 \in T_{VRS-TO}$ ارزیابی شده در فناوری مرجع C یا H برابر با کارایی شعاعی خروجی در فناوری بسته متناظر \bar{C} یا \bar{H} است.

عبارت فوق نشان می دهد که در عمل می توان کارایی همه DMU ها را در فناوری های بسته که دارای شکل عملیاتی بیان شده توسط قضیه 2 هسند ارزیابی کرد.

جدول 3 کارایی شعاعی خروجی همه پنج DMU در فناوری T_{VRS-TO} و فناوری های VRS ، CRS ، $NIRS$ و $NDRS$ را نشان می دهد. پیوست ب مثالی از برنامه خطی مورد استفاده برای محاسبه را نشان می دهد.

E_{VRS} ، E_{NIRS} و E_{NDRS} کارایی شعاعی خروجی DMU_0 در فناوری های T_{VRS-TO} ، H و G است. با قضیه 3 در پادوینسکی (2004 الف)، که در آن چهارمین مورد از $G-SCRS$ به صورت غیر ممکن در فناوری محدب حذف می شود، DMU_0 مورد زیر را نشان می دهد

- اگر و تنها اگر $E_{NDRS} = E_{NIRS} = E_{VRS}$ باشد

- اگر $G-IRS$ و تنها اگر $E_{NIRS} < E_{NDRS} \leq E_{VRS}$ باشد

- اگر و تنها اگر $E_{NDRS} < E_{NIRS} \leq E_{VRS}$ باشد $G-DRS$

برای مثال همان طور که در جدول 3 نشان داده شده است برای DMU_1 داریم: $E_{VRS} = 1$ ، $E_{NIRS} = 0.5$ و

$E_{NDRS} = 1$. از این روی DMU_1 ، $G-IRS$ را نشان می دهد. ستون پایانی جدول 3 انواع GRS را برای چهار

خروجی DMU نشان می دهد. بر اساس قضیه 1، این مقدار متناسب با ویژگی RTS محلی نشان داده شده در جدول 2 است.

به طور خلاصه، همان طور که گفته شد، امکان ارزیابی انواع RTS محلی و جهانی به صورت مستقل وجود دارد.

با این حال بر اساس قضیه 1، در یک فناوری محدب، دو ویژگی مشابه هستند و کافی است تا تنها یکی از آن ها بدست بیایند. از این روی تنها ویژگی RTS محلی در هر فناوری چند وجهی را می توان با رویکرد واحد در

پادیتوسکی و همکاران 2016 بدست آورد که در مثال فوق استفاده شده است. بر عکس، تست انواع RTS نیازمند بیانیه های عملیاتی فناوری های NIRS و NDRS است که به آسانی قابل دسترس نیست.

9- مثال دیگر: یک مدل تحلیل پوششی داده های شبکه دو مرحله ای

منابع و مطالعات زیادی در خصوص انواع مختلف مدل های تحلیل پوششی شبکه وجود دارد (کایو 2014). فرایند تولید دو مرحله ای ساده را در نظر بگیرید که در آن هر DMU با سه گانه (X, Z, Y) توصیف می شود و در آن $X \in \mathbb{R}_+^m, Z \in \mathbb{R}_+^p$ و $Y \in \mathbb{R}_+^s$ بردار های ورودی ها، خروجی های میانی تولید شده با اولین مرحله تولید و ورودی ها در دومین مرحله تولید و بردار خروجی های نهایی میباشند.

هر $DMU \bar{j} = 1, \dots, n$ مشاهده شده به صورت (X_j, Z_j, Y_j) بیان می شود. ماتریس $n \times m$ بیان شده \bar{X} است که ستون آن بردار های $X_j, j = 1, \dots, n$ هستند. به طور مشابه، فرض کنید که ماتریس های \bar{Z} و \bar{Y} متشکل از ستون بردار Z_j و $Y_j, j = 1, \dots, n$ باشد.

فرض کنید که علاقه مند به تولید ماکزیمم خروجی های نهایی توصیف شده توسط بردار Y از بردار معین از خروجی Y می باشیم. با در نظر گرفتن ساختار شبکه فرایند تولید و فرض این که هر دو مرحله VRS را نشان می دهد، فناوری T^N در ابعاد خروجی نهایی و ورودی تعریف می شود. این تعریف متناسب با تعریف ساهو و همکاران 2014 است.

تعریف 5: فناوری شبکه T^N با دو مرحله VRS مجموعه ای از همه $DMUs (X, Y) \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^s$ های غیر منفی است که برای آن ها بردار های شدت $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^n$ ، خروجی های میانی $Z \in \mathbb{R}_+^p$ و بردار های کمکی $d \in \mathbb{R}_+^m, e \in \mathbb{R}_+^s, f, g \in \mathbb{R}_+^p$ است به طوری که

$$\bar{X}\lambda + d = X, \quad (14a)$$

$$\bar{Y}\mu - e = Y, \quad (14b)$$

$$\bar{Z}\lambda - Z - f = 0, \quad (14c)$$

$$\bar{Z}\mu - Z + g = 0, \quad (14d)$$

$$1^T\lambda = 1, \quad (14e)$$

$$1^T\mu = 1. \quad (14f)$$

می باشد.

شرایط فوق (14) یک مورد ویژه از شرایط (1) پادینوسکی و همکاران 2016 است که یک فناوری چند وجهی عمومی را تعریف می کنند که قابلیت عرضه آزاد ورودی ها و خروجی ها را نشان می دهد. به طور خاص، فرمولاسیون عمومی بعدی از بردار U_0 برای محاسبه کشش های یک طرفه و شناسایی RTS استفاده می کند. در بردار موردی U_0 بردار ثابت را در سمت راست مساوی نشان می دهد

$$U_0 = (0, 0, 1, 1)^T. \quad (15)$$

توجه کنید که دو مولفه صفر اول بردار U_0 بردار ها هستند و دو مورد اخیر به صورت اسکالر هستند چون T^N یک فناوری چند وجهی است، محاسبه کشش های مقیاس یک طرفه و بسیاری از ویژگی های حاشیه ای دیگر در مرز آن را می توان با حل برنامه های خطی در پادینوسکی و همکاران (2016) انجام داد. به طور ویژه فرض کنید که $DMU(X_0, Y_0)$ خروجی کارآمد شعاعی در فناوری T^N باشد یعنی مطابق با فرض 1 است.

توجه کنید که ارزیابی کارایی شعاعی خروجی DMU_0 نیازمند جایگزینی بردار های X و Y در سمت راست معادلات (14 الف) و (14 ب) با بردار های X_0 و Y_0 است که در آن η یک اسکالر بدون علامت است و η در محدودیت های حاصله بیشینه می شود. فرض کنید که μ, ν و ω بردار های دوگانه متناظر با محدودیت های این برنامه خطی خروجی مجبور است. به طور دقیق تر، بردار های μ و ν متناظر با محدودیت های بر اساس 14 الف و 14 ب هستند و ω شامل متغیر های دو گانه محدودیت ها است (14 پ و 14 ت).

همان طور که توسط پادینوسکی و همکاران (16) نشان داده شده است، کشش های مقیاس یک طرفه در DMU_0

در هر فناوری پلی هدرال را می توان به صورت زیر محاسبه کرد

$$\begin{aligned}\varepsilon^+(X_0, Y_0) &= 1 - \max_{(\mu, \nu, \omega) \in \Omega} \{U_0^T \omega\}, \\ \varepsilon^-(X_0, Y_0) &= 1 - \min_{(\mu, \nu, \omega) \in \Omega} \{U_0^T \omega\},\end{aligned}\quad (16)$$

که Ω مجموعه راه حل های بهینه برای برنامه خروجی محور دوگانه (مضربی) می باشد.

با در نظر گرفتن (15)، می توان فرمول عمومی (16) را با معادله زیر بیان کرد

$$\begin{aligned}\varepsilon^+(X_0, Y_0) &= 1 - \max_{(\mu, \nu, \omega) \in \Omega} \{\omega_1 + \omega_2\}, \\ \varepsilon^-(X_0, Y_0) &= 1 - \min_{(\mu, \nu, \omega) \in \Omega} \{\omega_1 + \omega_2\},\end{aligned}\quad (17)$$

که ω_1 و ω_2 متغیر های دو دویی (اسکالر) برای دو مساوی 14 و 14 ث است.

بر طبق تعریف 2، کشش های مقیاس یک طرفه (17) منجر به شناسایی RTS ساده DMU0 می شود. با قضیه

1، انواع محلی RTS بیان شده با تعریف 2 منطبق با انواع GRS متناظر است. به علاوه، بر طبق نتیجه فرعی،

یک DMU0 در فناوری شبکه T^N در MPSS قرار دارد اگر CRS را نشان دهد

لازم به ذکر است که دست یابی به این ویژگی های همومی DMU0 نیازمند ایجاد فناوری های مرجع NIRS و

NDRS برای فناوری شبکه T^N می باشد که قابل دسترس نمی باشد. با این حال، همان طور که نشان داده شده

است، انواع GRS و مفهوم MPSS را می توان با استفاده از مفهوم کشش مقیاس یک طرفه ارزیابی کرد. ارزیابی

آن ها در فناوری T^N نیازمند حل دو معادله خطی (17) است که یک کار ساده است.

تبصره 6: کشش های مقیاس یک طرفه را می توان با استفاده از مجموعه ای از راه حل های بهینه Δ تا برنامه

ورودی محور دو گانه بدست آورد. با فرض این که DMU0 به طور هم زمان هم از نظر ورودی و هم خروجی

کارآمد است، پادینوسکیو همکارانشان داده اند که این کشش های مقیاس به صورت زیر محاسبه می شوند

$$\begin{aligned}\varepsilon^+(X_0, Y_0) &= 1 / (1 - \min_{(\mu, \nu, \omega) \in \Delta} \{U_0^T \omega\}), \\ \varepsilon^-(X_0, Y_0) &= 1 / (1 - \max_{(\mu, \nu, \omega) \in \Delta} \{U_0^T \omega\}).\end{aligned}\quad (18)$$

برای فناوری شبکه T^N ، فرمول 18 به صورت زیر نوشته می شود

$$\begin{aligned}\varepsilon^+(X_0, Y_0) &= 1 / (1 - \min_{(\mu, \nu, \omega) \in \Delta} \{\omega_1 + \omega_2\}), \\ \varepsilon^-(X_0, Y_0) &= 1 / (1 - \max_{(\mu, \nu, \omega) \in \Delta} \{\omega_1 + \omega_2\}),\end{aligned}$$

که ω_1 و ω_2 متغیر های دوگانه را با مساوی های 14e و 14f در برنامه مضرب ورودی محور هستند. این

معادله فرمول 8 ارایه شده در بانکر و ترال 1992 را برای فناوری VRS تک مرحله ای تعمیم می دهد.

10- نتیجه گیری

در طی سال های اخیر، یک مسیر تحقیقاتی مهم در تئوری تحلیل داده های پوششی، توسعه مدل های جدید بر اساس فرضیات ویژه در مورد فرایند تولید به جای فرضیات در مدل VRS استاندارد است. بسیاری از این رویکرد های جدید، فناوری تولید را به صورت یک مجموعه محدب مدل سازی می کنند. نمونه هایی از این فناوری های چند وجهی در مدل های با خروجی های نامطلوب و غیر قابل عرضه در تعمیم به فناوری VRS با توازن تولید یا محدودیت های وزنی، مدل های فرایند تولید با چندین مولفه و مدل تحلیل پوششی داده شبکه حادث شده اند. پادینوسکی در مقاله اخیر، یک روش برنامه نویسی خطی واحد را برای ارزیابی کشش مقیاس و شناسایی DMU RTS ها در فناوری تولید چند وجهی ارائه کرده اند. این توسعه منجر به یک سوال نظری مبنی بر این شده است که آیا شناسایی RTS در فناوری چند وجهی (که از نظر مفهومی با کشش مقیاس ارزیابی شده در یک نقطه معین از ارز تعیین می شود) متناسب با ویژگی های جهانی مقیاس (از جمله مفهوم MPSS) همانند مورد فناوری VRS سنتی است یا خیر.

در این مقاله ما سعی داریم تا به سوال فوق در یک دسته از فناوری های محدب بسته پاسخ دهیم. ما در ابتدا اثبات می کنیم که کشش های مقیاس یک طرفه مرز های کارآمد در این کلاس رفتار خوبی دارند و ویژگی های آن ها به طور کافی مشابه با ویژگی های مشاهده شده در فناوری های چند وجهی است. به این ترتیب امکان تعمیم شناسایی RTS استاندارد محلی به مرز های تولید غیر یکنواخت فناوری های محدب بسته وجود دارد. بر اساس این توسعه، اثبات می شود که انواع RTS برای این دسته بسیار بزرگ از مرز ها متناسب با مفاهیم استاندارد MPSS و جهت MPSS بیان شده با انواع عمومی نسبت بازده به مقیاس است.

توسعه فوق نشان می دهد که فناوری های محدب بسته و به ویژه همه فناوری های چند وجهی از دیدگاه نظری مشابه با مدل VRS هستند. این نتیجه دارای یک پیامد عملی مهم است. روش های استاندارد تست MPSS و به طور کلی انواع RTS ها بستگی به ارزیابی کارایی شعاعی ورودی و خروجی DMU در فناوری های RTS ثابت، غیر کاهشی و غیر افزایشی دارد. در مورد VRS سنتی، فناوری ها به خوبی شناخته شده اند. با این حال برای بسیاری از فناوری های پلی هدرال، فناوری های مرجع قابل دسترس نمی باشند. نتایج نظری نشان می دهد که به جای توسعه این فناوری های مرجع، ما اقدام به ارزیابی انواع RTS با استفاده از روش های برنامه نویسی

خطی مناسب برای فناوری چند وجهی می‌کنیم. بر اساس نتایج این مقاله، کار ترجمه انواع RTS های محلی به MPSS وانواع RTS جهانی، ساده تر می‌شود.

پیوست A: اثبات

اثبات قضیه 1: اثبات بخش 1 از این فرض تبعیت می‌کند که T مجموعه محدب بسته است. برای اثبات بخش 2، اول دقت کنید که $\sup \beta(\alpha) < +\infty$ به ازای $\alpha \in \Gamma$ است. در واقع، عکس قضیه را فرض کنید برای مثال، یک $\alpha^* \in \Gamma$ وجود دارد به طوری که $\sup \beta(\alpha^*) = +\infty$ است. سپس با قضیه 2 در پادینوسکی و بادزین-چاموف 2013، $\sup \beta(\alpha) = +\infty$ به ازای همه $\alpha \in \Gamma$ است که متناقض با فرض 1 است. از این روی به ازای هر $\alpha \in \Gamma$ ، $\sup \beta(\alpha)$ متناهی بوده و چون T بسته است، می‌توان آن را بدست آورد. بخش 3، به صورت لم 3 در پدینوسکی 2004 الف اثبات شده است.

اکنون نتیجه فرعی 1 را به صورت لم قبل از اثبات قضیه 1 اثبات می‌کنیم

لم 1: DMU_0 در صورتی در MPSS قرار دارد که اگر و تنها اگر CRS را نشان دهد

اثبات لم 1: اگر DMU_0 CRS را نشان دهد. می‌توان ثابت کرد که DMU_0 در MPSS قرار دارد یعنی

$$\frac{\bar{\beta}(\alpha)}{\alpha} \leq 1, \forall \alpha \in \Gamma, \alpha > 0. \quad (A.1)$$

فرض کنید که $\alpha = 1$ یک نقطه درونی Γ باشد، سپس همان طور که در بخش 2 گفته شد، مشتقات یک طرفه

$\bar{\beta}'_-(1)$ و $\bar{\beta}'_+(1)$ وجود داشته و متناهی هستند. به ازای همه $\alpha \in \Gamma$ داریم

$$\bar{\beta}(\alpha) \leq 1 + \bar{\beta}'_+(1)(\alpha - 1), \quad (A.2a)$$

$$\bar{\beta}(\alpha) \leq 1 + \bar{\beta}'_-(1)(\alpha - 1). \quad (A.2b)$$

$\alpha \in \Gamma$ را در نظر بگیرید. اگر $\alpha > 1$ باشد، آنگاه چون $\bar{\beta}'_+(1) \leq 1$ است، A2-a اشاره به $\bar{\beta}(\alpha) \leq \alpha$

دارد. اگر $0 < \alpha < 1$ باشد، چون $\bar{\beta}'_-(1) \geq 1$ است، A-2b بیانگر $\bar{\beta}(\alpha) \leq \alpha$ است. هر دو مورد به a-1

اشاره دارد

اکنون فرض کنید که $\alpha = 1$ نقطه اکسترم سمت چپ Γ باشد. سپس $\alpha \geq 1$ به ازای همه مقادیر $\alpha \in \Gamma$ است. همان طور که در بخش 2 نشان داده شده است، $\bar{\beta}'_+(1) > -\infty$ است. با در نظر گرفتن تعریف CRS، $\bar{\beta}'_+(1)$ متناهی بوده و $\bar{\beta}'_+(1) \leq 1$ است. نامساوی A-1 اکنون از A-2a پیروی می کند.

فرض کنید که $\alpha = 1$ نقطه اکسترم سمت راست Γ باشد. بایستی a-1 به ازای همه $\alpha \in \Gamma$ ، $0 < \alpha < 1$ اثبات شود. همان طور که در بخش 2 نشان داده شده است، $\bar{\beta}'_-(1) < +\infty$ است. با در نظر گرفتن تعریف CRS، $\bar{\beta}'_-(1)$ متناهی بوده و $\bar{\beta}'_-(1) \geq 1$ است. سپس a-1 از a-2b به صورت بالا پیروی می کند.

برعکس فرض کنید که DMU_0 در MPSS قرار دارد یعنی A-1 صحت دارد. بایستی اثبات کرد که $\bar{\beta}'_+(1) \leq 1$ اگر $\alpha = 1$ نقطه اکسترم راست Γ باشد، و $\bar{\beta}'_-(1) \geq 1$ اگر $\alpha = 1$ باشد. هر دو اثبات مشابه بوده و ما تنها بخش اول را اثبات می کنیم. با تعریف زیر داریم

$$\bar{\beta}'_+(1) = \lim_{\alpha \downarrow 1} \frac{\bar{\beta}(\alpha) - \bar{\beta}(1)}{\alpha - 1}. \quad (A.3)$$

با فرض این که $\bar{\beta}'_+(1) > 1$ است، سپس به ازای همه $\alpha > 1$ نزدیک 1 است و داریم

$$\frac{\bar{\beta}(\alpha) - \bar{\beta}(1)}{\alpha - 1} > 1. \quad (A.4)$$

با بازنویسی و چون $\bar{\beta}(1) = 1$ است، ما داریم $\bar{\beta}(\alpha) > \alpha$ که نقض کننده A-1 است

اثبات قضیه 2: تعادل CRS و G-CRS توسط لم 1 اثبات شده است. برای اثبات بیشتر، تابع بهره وری متوسط

$\varphi(\alpha) = \bar{\beta}(\alpha)/\alpha$ تعریف شده بر روی $\Gamma_0 = \Gamma \setminus \{0\}$ را در نظر بگیرید. φ^* را در $\varphi(\alpha)$ بر روی Γ_0 بیان

کنید. فرض کنید که φ^* متناهی یا مساوی با $+\infty$ باشد، $\Gamma^* = \{\alpha \in \Gamma \mid \varphi(\alpha) = \varphi^*\}$ است. $\Gamma^* = \emptyset$

در صورتی صادق است که φ^* بدست بیاید. با لم 5 در پادینوسکی (2004 الف)، اگر $\Gamma^* \neq \emptyset$ باشد آنگاه Γ^*

یک بازه بسته است. از این روی، Γ_0 به صورت واحدی از سه بازه به صورت زیر است

$$\Gamma_0 = \Gamma^+ \cup \Gamma^* \cup \Gamma^-, \quad (A.5)$$

که به ازای $\alpha_1 \in \Gamma^+$, $\alpha_2 \in \Gamma^*$ و $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$, $\alpha_3 \in \Gamma^-$ را داریم. هر یک از سه بازه Γ^+ , Γ^* و Γ^- و نه همه آنها، ممکن است مجموعه تهی باشند. با این حال مورد $\Gamma^* = \emptyset$ است اگرچه $\Gamma^+ \neq \emptyset$ و $\Gamma^- \neq \emptyset$ غیر ممکن است (پادینوسکی 2004 الف).

بر اساس قضیه 5 اثبات شده در پادینوسکی (2004 الف)، $\varphi(\alpha)$ در Γ^+ افزایش و در Γ^- کاهش می یابد (به شرط این که این بازه ها تهی نباشد). این نشان می دهد که $G-IRS$ DMU_0 را نشان می دهد اگر $1 \in \Gamma^+$ باشد (و از این روی در MPSS) قرار دارد اگر $1 \in \Gamma^*$ و $G-DRS$ است اگر $\alpha = 1 \in \Gamma^-$ است.

فرض کنید $1 \in \Gamma^+$ باشد. چون Γ^* بازه مثبت است، از (A-5)، $\alpha = 1$ نقطه اکستریم سمت راست Γ^+ است.

چون $\varphi(\alpha)$ بر روی Γ^+ افزایش می یابد به ازای همه α واقع در Γ^+ در سمت راست $\alpha = 1$ ، داریم

$\bar{\beta}(\alpha)/\alpha > \bar{\beta}(1)/1 = 1$. این به طور ضمنی نشان دهنده A-4 است. بر اساس A-3، $\bar{\beta}'_+(1) \geq 1$ است. در

صورتی که فرض شود $\bar{\beta}'_+(1) = 1$ ، آنگاه بر اساس تعریف 2 داریم، CRS DMU_0 را نشان داده و بر اساس لم 1،

DMU_0 در MPSS قرار دارد. از این روی، $1 \in \Gamma^*$ است که نقض کننده فرضیه است. لذا $\bar{\beta}'_+ > 1$ و بر اساس تعریف 2، IRS DMU_0 را نشان می دهد.

اگر $1 \in \Gamma^-$ باشد، یک اثبات مشابه، ثابت می کند که DRS ، DMU_0 را اثبات می کند.

اثبات قضیه 2: عبارت 1 را در نظر بگیرید. C^* مجموعه‌های از $DMUs(X, Y)$ توصیف شده با شرط 11 در نظر

گرفته می شود که مساوی 11C از آن حذف می شود. ما باید اثبات کنیم که $\bar{C} = C^*$ است. اولاً باید ذکر کنیم

که C^* یک مجموعه چند وجهی است. از این روی C^* به صورت مجموعه بسته است.

$DMU(X, Y) \in C$ را در نظر ب

یرید. بر اساس (13)، $(X, Y) = \delta(\bar{X}, \bar{Y})$ که $(\bar{X}, \bar{Y}) \in T_{VRS-TO}$ است. DMU مطابق با (11) با برخی از بردارها

\bar{d} ، $\bar{\lambda}$ ، $\bar{\pi}$ ، \bar{e} است. سپس $DMU \delta(\bar{X}, \bar{Y})$ مطابق با 11 الف و 11 ب با بردارهای $\delta\bar{d}$ ، $\delta\bar{\lambda}$ ، $\delta\bar{\pi}$ ، $\delta\bar{e}$ است.

از این روی، $(X, Y) \in C^*$ و $C \subseteq C^*$ است. چون مجموعه C^* بسته است، داریم $\bar{C} = cl(C) \subseteq cl(C^*) = C^*$.

بر عکس، فرض کنید که $(X, Y) \in C^*$ باشد. سپس (X, Y) شرط 11 الف و ب را با برخی بردارهای

d' و λ' ، π' ، e' خواهد داشت. فرض کنید که $\lambda^* = 1^T \lambda'$ باشد. دو مورد زیر امکان پذیر است. در ابتدا، فرض

کنید که $\lambda^* > 0$ باشد. $(\tilde{X}, \tilde{Y}) = (1/\lambda^*)(X, Y)$ را تعریف کنید. سپس، شرط 11 را با $(\tilde{X}, \tilde{Y}) \in \mathcal{T}_{VRS-TO}$ است. $d = d'/\lambda^*$ و $\lambda = \lambda'/\lambda^*$ ، $\pi = \pi'/\lambda^*$ ، $e = e'/\lambda^*$ برآورد کند. از این روی $(X, Y) \in \mathcal{C} \subseteq \bar{\mathcal{C}}$ ، 13، است.

اکنون فرض کنید که $\lambda^* = 0$ باشد. لذا، $\lambda' = 0$ است. $DMUs (X_k, Y_k), k = 1, 2, \dots$ به صورت زیر تعریف می شود

$$(X_k, Y_k) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{n} (X_j, Y_j) \right) + k(X, Y).$$

هر $DMU (X_k, Y_k)$ نامنفی است و همه شرایط 11 را با بردار های $\lambda_k = (1/n, \dots, 1/n)$ ، $\pi_k = k\pi'$ ، $e_k = ke'$ و $d_k = kd'$ برآورده می کند. از این روی $(X_k, Y_k) \in \mathcal{T}_{VRS-TO}$ ، به ازای همه $k = 1, 2, \dots$ ، در نظر بگیرید که دنباله $DMUs (\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k) = (1/k)(X_k, Y_k)$ مطلوب است، لذا به ازای همه $k = 1, 2, \dots$ ، داریم $(\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k) \in \mathcal{C}$. به

علاوه

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (\tilde{X}_k, \tilde{Y}_k) = (X, Y).$$

از این روی، $(X, Y) \in \bar{\mathcal{C}}$ است. چون $DMU (X, Y)$ یک مولفه دلخواه از \mathcal{C}^* در هر دو مورد $\lambda^* > 0$ و $\lambda^* = 0$ است، داریم $\bar{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{C}^*$. با در نظر گرفتن اولین بخش اثبات، داریم $\mathcal{C}^* = \bar{\mathcal{C}}$.

اثبات دو بخش دیگر قضیه مشابه است. این خود مستلزم تعریف فناوری های \mathcal{H}^* و \mathcal{G}^* به صورت مجموعه ای از همه DMU هایی است که شرط 11 را برآورده می کند که در آن مساوی (11پ) با نامساوی " \leq " و " \geq " جایگزین می شود. همانند مورد فناوری \mathcal{C}^* در ابتدا اثبات می شود که مجموعه های \mathcal{H}^* و \mathcal{G}^* چند وجهی و بسته هستند. تکرار مراحل بالا نشان می دهد که اثبات $\mathcal{H}^* = \bar{\mathcal{H}}$ آسان است. چون برای فناوری \mathcal{G} ، مورد $\lambda' = 0$ غیر ممکن است، داریم، $\mathcal{G}^* = \mathcal{G}$ که نشان می دهد \mathcal{G} یک مجموعه بسته است.

اثبات قضیه 2: $\eta^* = \sup\{\eta \mid (X_0, \eta Y_0) \in \mathcal{C}\}$ و $\bar{\eta}^* = \sup\{\eta \mid (\bar{X}_0, \eta \bar{Y}_0) \in \bar{\mathcal{C}}\}$ را تعریف کنید. چون

$$\mathcal{C} \subseteq \bar{\mathcal{C}}, \quad \eta^* \leq \bar{\eta}^*$$

بر عکس، توجه کنید که محدودیت های وزن (7) در فناوری T_{VRS-TO} پیوسته است. با قضیه 5 در پادینوسکی و بادزین چاموف 2013، آن ها در فناوری \bar{C} پیوستگی دارند و فناوری CRS منطبق بر محدودیت های وزنی است. از اینرو سوپریمم $\bar{\eta}^* < +\infty$ است. زیرا فناوری \bar{C} بسته است، بدست می آید. بدیهی است که $\bar{\eta}^* \geq 1$ و $(X_0, \bar{\eta}^* Y_0) \in \bar{C}$ است.

فرض کنید که $DMU (X_0, Y_0) \in T_{VRS-TO}$ شرط 11 را برخی بردار های $\bar{\lambda}, \bar{\pi}, \bar{e}$ و \bar{d} برآورده کنند. به طور مشابه، $DMU (X_0, \bar{\eta}^* Y_0) \in \bar{C}$ شرط های 11 الف و ب را با برخی از بردار های λ', π', e' و d' برآورده می کند. فرض کنید که $\lambda^* = 1^T \lambda'$ باشد. دو مورد حادث می شود.

اول، فرض کنید که $\lambda^* > 0$ باشد. در این صورت، می توان به سادگی اثبات کرد که $(X_0, \bar{\eta}^* Y_0) \in C$ است. در واقع، $(\bar{X}, \bar{Y}) = (1/\lambda^*)(X_0, \bar{\eta}^* Y_0)$ را تعریف کنید. سپس (\bar{X}, \bar{Y}) منطبق با شرط 11 با $(\bar{X}, \bar{Y}) \in T_{VRS-TO}$ است. از این روی $d = d'/\lambda^*$ و $\lambda = \lambda'/\lambda^*, \pi = \pi'/\lambda^*, e = e'/\lambda^*$ چون

$$(X_0, \bar{\eta}^* Y_0) = \lambda^* (\bar{X}, \bar{Y}) \quad (13) \text{ با } (X_0, \bar{\eta}^* Y_0) \in C, \text{ لذا اگر } \lambda^* > 0 \text{ باشد داریم } \eta^* \geq \bar{\eta}^*$$

اکنون فرض کنید که $\lambda^* = 0$ باشد، به ازای همه $k = 1, 2, \dots$ معادله زیر را تعریف می کنیم

$$(\bar{X}_k, \bar{Y}_k) = \frac{1}{k}(X_0, Y_0) + \left(1 - \frac{1}{k}\right)(X_0, \bar{\eta}^* Y_0). \quad (A.6)$$

هر $DMU (\bar{X}_k, \bar{Y}_k)$ غیر منفی بوده و شرایط 11 الف و ب را با بردار های $\lambda_k = (1/k)\bar{\lambda}, \pi_k = (1/k)\bar{\pi} + (1 - 1/k)\pi', e_k = (1/k)\bar{e} + (1 - 1/k)e'$ و $d_k = (1/k)d + (1 - 1/k)d'$ برآورده می

کند. از این روی، $(\bar{X}_k, \bar{Y}_k) \in C$ ، به ازای همه $k = 1, 2, \dots$ است. با بازنویسی A-6 داریم

$$(\bar{X}_k, \bar{Y}_k) = (X_0, \eta_k Y_0) \in C,$$

که $\eta_k = 1/k + (1 - 1/k)\bar{\eta}^* \leq \bar{\eta}^*$ است. چون $\lim_{k \rightarrow +\infty} \eta_k = \bar{\eta}^*$ است و بر اساس تعریف η^* ، $\eta^* \geq \bar{\eta}^*$

به صورت زیر است. با ترکیب همه بخش های اثبات داریم $\eta^* = \bar{\eta}^*$ است.

اثبات برای فناوری های \mathcal{H} و $\bar{\mathcal{H}}$ مشابه است. به طور خاص، چون $\bar{\mathcal{H}} \subseteq \bar{\mathcal{C}}$ است، داریم $\bar{\eta}^* = \sup\{\eta \mid (X_0, \eta Y_0) \in \bar{\mathcal{H}}\} \leq \bar{\eta}^*$ است. همان طور که اثبات شد $\bar{\eta}^* < +\infty$ است. از این روی $\bar{\eta}^* < +\infty$ است. بقیه اثبات مشابه با اثبات برای فناوری C است و حذف می شود.

پیوست ب: مدل هایی برای مثال عددی

در زیر ما برنامه های خطی را در ارزیابی RTS محلی و جهانی در مثال بحث شده در بخش 8 ارایه می کنیم. به طور ویژه DMU1 را در نظر بگیرید.

برای محاسبه کشش های مقیاس یک طرفه در DMU1، ما ابتدا مقادیر اکسترم متغیر ω در مجموعه ای از محاسبه های بهینه را با برنامه متناظر (8) ارزیابی می کنیم. برای مثال مقدار ω^{\max} با حل برنامه خطی زیر بدست می آید

$$\begin{aligned} \omega^{\max} = \max \quad & \omega \\ \text{subject to} \quad & 2v_1 + 2v_2 + 3v_3 + \omega = 1, \\ & 2u_1 + 1u_2 = 1, \\ & 2v_1 + 2v_2 + 3v_3 - 2u_1 - 1u_2 + \omega \geq 0, \\ & 4v_1 + 4v_2 + 3v_3 - 4u_1 - 3u_2 + \omega \geq 0, \\ & 6v_1 + 4v_2 + 5v_3 - 3u_1 - 2u_2 + \omega \geq 0, \\ & 2v_1 + 3v_2 + 3v_3 - 3u_1 - 4u_2 + \omega \geq 0, \\ & 6v_1 + 5v_2 + 4v_3 - 4u_1 - 5u_2 + \omega \geq 0, \\ & v_1 - v_2 \geq 0, \\ & -v_1 + 2v_2 \geq 0, \\ & -2u_1 + 3u_2 \geq 0, \\ & v_3 - 2u_2 \geq 0, \\ & u_1, u_2, v_1, v_2, v_3 \geq 0, \quad \omega \text{ sign free.} \end{aligned}$$

مقدار ω^{\min} با تغییر بیشینه سازی ω در برنامه فوق برای کمینه سازی بدست می آید. ما مقادیر ω^{\max} و

ω^{\min} را به کشش های مقیاس یک طرفه با استفاده از فرمول 4 تبدیل می کنیم

برای ویژگی GRS، ما ابتدا کارایی شعاعی خروجی هر DMU0 در فناوری های مرجع NIRS و NDRS برای

T_{VRS-TO} را ارزیابی می کنیم. همان طور که در بخش 8 گفته شد، هر GRS هر DMU0 با مقایسه این کارایی

ها با کارایی آن در فناوری T_{VRS-TO} بدست می آید.

برای مثال، کارایی شعاعی خروجی $DMU 1$ در فناوری NIRS مرجع H (در \bar{H} : بستار، برای بحث به بخش 8 مراجعه کنید) معکوس مقدار بهینه η^* برنامه زیر است

$$\eta^* = \max \quad \eta$$

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 6\lambda_3 + 2\lambda_4 + 6\lambda_5 + 1\pi_1 - 1\pi_2 &\leq 2, \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 3\lambda_4 + 5\lambda_5 - 1\pi_1 + 2\pi_2 &\leq 2, \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3 + 3\lambda_4 + 4\lambda_5 + 1\pi_4 &\leq 3, \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 3\lambda_3 + 3\lambda_4 + 4\lambda_5 + 2\pi_3 &\geq 2\eta, \\ 1\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 + 4\lambda_4 + 5\lambda_5 - 3\pi_3 + 2\pi_4 &\geq 1\eta, \\ 1\lambda_1 + 1\lambda_2 + 1\lambda_3 + 1\lambda_4 + 1\lambda_5 &\leq 1, \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

است.

منوط به

برای کارایی شعاعی خروجی در فناوری NDRIS مرجع C ، علامت نامساوی دوم در برنامه فوق به " \geq " تغییر می کند.

پیوست پ: مثال ها

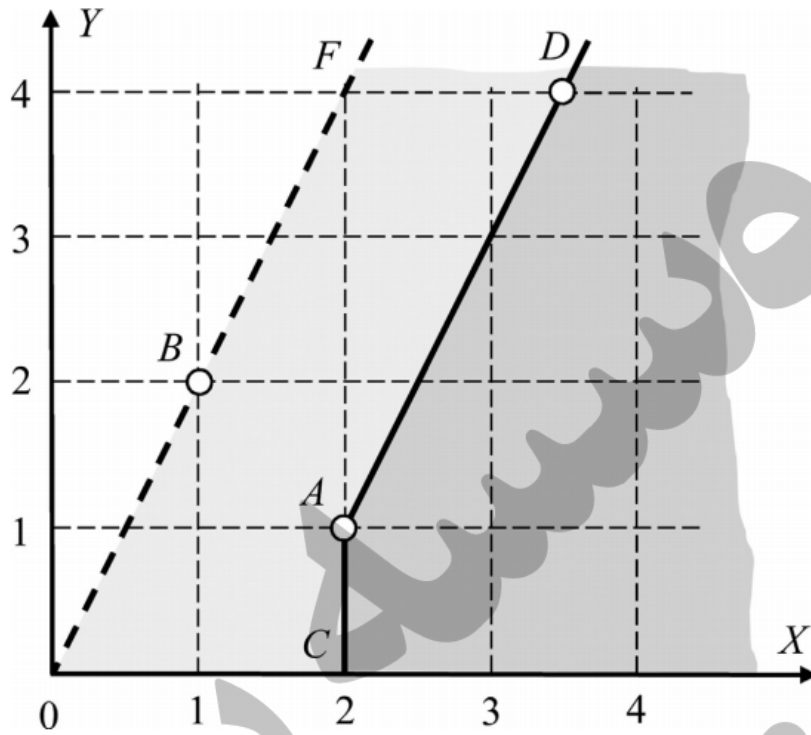
در زیر یک مثالی از فناوری VRS را با محدودیت های وزنی T_{VRS-TO} را ارائه می کنیم که فناوری های مرجع CRS و $NIRS$ $C-H$ ، مجموعه های غیر بسته هستند. یک مثال ارائه شده است که در پانویس نشان داده شده است. این مثال ها بیانگر اهمیت قضیه 2 و گزاره 2 برای ارزیابی کارایی شعاعی در این فناوری های مرجع است.

شکل 3.C، $DMU a$ مشاهده شده را نشان می دهد که در آن ورودی x معادل با 2 است و خروجی y معادل با 1 است. فرض کنید که محدودیت وزنی تعیین شده باشد

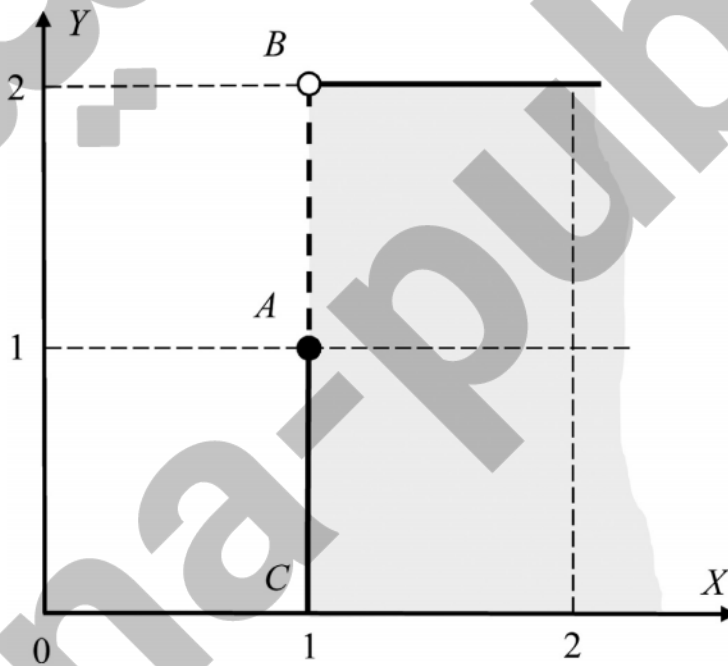
$$v_1 - 2u_1 \geq 0. \quad (C.1)$$

بر اساس تعریف 4، فناوری VRS T_{VRS-TO} با محدودیت وزنی و $DMU 4$ مجموعه ای از $DMUs (X, Y)$ نامنفی است به طوری که با بازنویسی 11، به طور غیر بدیهی داریم

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 1\pi_1 + d_1 &= X, \\ 1\lambda_1 + 2\pi_1 - e_1 &= Y, \\ 1\lambda_1 &= 1, \\ \lambda_1, \pi_1, d_1, e_1 &\geq 0. \end{aligned} \quad (C.2)$$



شکل 3-C: فناوری \bar{T}_{VRS-TO} (که با خاکستری تیره نشان داده شده است) و برای آن فناوری های Crs و NIRS (که با خاکستری روشن نشان داده شده است) یکسان بوده و به صورت مجموعه های بسته نمی باشند.



شکل 4-C: مثالی از فناوری \mathcal{T} که در آن کارایی شعاعی خروجی DMU A به شدت کوچک تر از فناوری $\bar{\mathcal{T}} = cl(\mathcal{T})$ است

فناوری T_{VRS-TO} در شکل C-3 به صورت سطح خاکستری تیره در زیر AD نشان داده شده است. برای مثال، DMU D از C-2 با اختیار کردن $\lambda_1 = 1, \pi_1 = 1.5$ و $d_1 = e_1 = 0$ بدست می آید.

فناوری CRS مرجع: بر طبق 13، فناوری مخروطی مرجع C از فناوری T_{VRS-TO} با مقیاس بندی واحد آن با ضرایب دلخواه $\delta \geq 0$ بدست می آید. از این روی، فناوری C شامل همه خطوطی است که از مبدا 0 شروع شده و از یک نقطه دلخواه در T_{VRS-TO} عبور می کند. برای مثال C شامل خطوط OA و OD است. از شکل C-3 بدیهی است که فناوری C مجموعه زیر خط OF است (که با هاشور خاکستری تیره و روشن نشان داده شده است). توجه کنید که فناوری C شامل خط OF نیست و یک مجموعه بسته نمی باشد.

بسته شدن فناوری C که با \bar{C} نشان داده می شود، مخروط بسته ای است که شامل خط OF بوده و سطح هاشور خورده زیر آن است. این فناوری با شرایط C-2 تعریف شده است که از آن مساوی $1\lambda_1 = 1$ حذف می شود. برای مثال، DMU B مطابق شرایط حاصله با $\lambda_1 = 0, \pi_1 = 1$ و $d_1 = e_1 = 0$ است. این موید عبارت 1 در قضیه 2 است.

فرض کنید که فناوری \bar{C} فناوری CRS متعارف توسعه یافته با استفاده از محدودیت های وزنی (C-1) است. فناوری NIRS مرجع: بر طبق تعریف (13)، فناوری NIRS مرجع H با مقیاس بندی DMU در فناوری T_{VRS-TO} با ضرایب $\delta \in [0, 1]$ بدست می آید. بدیهی است که برای فناوری در شکل C-3، فناوری NIRS مرجع آن مطابق با فناوری مرجع CRS توصیف شده در بالا است. از این روی فناوری H سطح هاشور خورده زیر خط OF است که این خط را نادیده گرفته و بنابر این یک مجموعه بسته نیست. بستر آن، فناوری \bar{H} است که شامل خط OF و سطح هاشور خورده زیر آن است.

همان طور که با عبارت یا گزاره 2 از قضیه 2 اثبات شده است، فناوری بسته \bar{H} با شرایط C-2 توصیف میشود که در آن مساوی نرمال سازی برای λ_1 با نامساوی $1\lambda_1 \leq 1$ جایگزین می شود. در رابطه با مورد فناوری CRS DMUB و هر DMU دیگر بر روی یا زیر خط OF، شرایط حاصله را با متغیرهای انتخاب شده λ_1, π_1, d_1 و e_1 دارد.

فناوری \bar{H} و نه فناوری H را می توان به صورت فناوری NIRS سنتی در نظر گرفت (فیر و گراسکویف 1985) که با محدودیت های وزنی بسط می یابد (C-1).

فناوری NDRS مرجع: با استفاده از تعریف 13، فناوری مرجع NDRS \mathcal{G} با مقیاس بندی همه DMUS در فناوری T_{VRS-TO} با ضرایب $\delta \geq 1$ بدست می آید. در مورد بررسی شده، فناوری \mathcal{G} مطابق با فناوری T_{VRS-TO} است. برای مثال، با حرکت از DMU A در امتداد خط OA و دور از مبدا (که متناظر با DMU A با $\delta \geq 1$ است)، تولید DMU هایی می کند که در فناوری T_{VRS-TO} قرار دارد.

بر طبق گزاره سوم قضیه 2، فناوری \mathcal{G} با شرایط C.2 توصیف میشود که در آن مساوی نرمال به ازای λ_1 با نامساوی $1 \leq \lambda_1$ جایگزین می شود و مجموعه حاصله از شرایط می تواند تولید DMU های فرضی جدید در مقایسه با فناوری T_{VRS-TO} کند.

همان طور که در قضیه 2 اثبات شده است و بر اساس این مثال، فناوری \mathcal{G} یک مجموعه بسته است. فناوری NDRS مرجع \mathcal{G} را می توان به صورت فناوری NDRS مرسوم (سفورد و ترال 1990) در نظر گرفت که با محدودیت های وزنی بسط می یابد (C-1).

مثال گویای قضیه 2 فناوری \mathcal{T} را به صورت سطح هاشور خورده در شکل C-4 در نظر بگیرید. توجه داشته باشید که \mathcal{T} شامل خط AC است ولی همه نقاط بین A-B و نیز B را حذف می کند. بستار $\bar{\mathcal{T}} = cl(\mathcal{T})$ شامل خط BC کامل است.

کارایی شعاعی خروجی $DMU A = (1, 1)$ در فناوری \mathcal{T} ، معکوس سوپرمیم است

$$\eta^* = \sup\{\eta \mid (1, \eta) \in \mathcal{T}\} = 1.$$

از این روی، کارایی شعاعی خروجی DMUA در \mathcal{T} برابر با 1 است. این می تواند بزرگ تر از کارایی شعاعی خروجی A در فناوری $\bar{\mathcal{T}}$ باشد و به این ترتیب برابر با 0.5 است.