

تعیین توابع خزش و آرامش از یک آزمایش واحد

ت:انتخاب بهینه ثابت فنر

ارایه برخی اطلاعات در مورد مقدار بهینه ثابت فنر جهت بدست آوردن "بهترین" داده ها برای $E(t)$ و $D(t)$ در یک آزمایش مهم است. بر اساس تجزیه تحلیل ارایه شده در بخش 2 پ می توان گفت که هر چه ثابت فنر بزرگ تر باشد، میزان غالبیت فرایند استراحت بر فرایند خزش بیشتر خواهد بود، در حالی که هر چه ثابت فنر کوچک تر باشد، میزان غالبیت فرایند خزش بر فرایند استراحت بیشتر خواهد بود. برای کمی سازی این موضوع، معادله (3) را به شکل $F_b(t) + k_s \cdot \Delta l_b(t) = k_s \cdot \Delta l$ بازنویسی می کنیم.

اولین بخش از سمت چپ معادله، سهم فرایند استراحت را تحت تغییر شکل متغیر نشان می دهد، در حالی که دومین بخش در سمت چپ بیانگر فرایند خزش تحت بار گذاری متغیر است. سختی فنر بایستی طوری انتخاب شود که مقادیر میانگین در هر دو بخش مربوط به سمت چپ معادله دارای وزن برابر باشند. با این حال، حل این مسئله، یک مشکل پیچیده می باشد.

3-راه حل های فرم بسته برای مدل کلون ویت تعمیم یافته (GKV)

راه حل های تحلیلی و فرم بسته برای تغییر شکل و نیرو در میله به صورت تابعی از زمان در یک مثال ساده مشتق می شوند که در آن میله با عناصر کلون-ویت همراه با یک فنر، به صورت دنباله ای موسوم به مدل GKV نشان داده می شود (تشوگل 1989). فنر در مدل GKV منجر به ایجاد یک پاسخ ویسکوالاستیک از میله می شود و نبایستی با فنر بار اشتباه گرفته شود. برای ساده تر شدن مطلب، کافی است تا تنها سه عنصر KV در نظر گرفته شود: مورد عمومی عناصر N را می توان به آسانی از تجزیه تحلیل استنباط کرد. تابع استراحت در (1) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$E(t) = E_{\infty} + E_1 e^{-t/\tau_1} + E_2 e^{-t/\tau_2} + E_3 e^{-t/\tau_3}, \quad (10)$$

که $\{E_i, \tau_i\}_{i=1}^3$ بیانگر طیف گسسته مدول کشسانی E_i و زمان استراحت τ_i است. این مدل GKV دارای هفت پارامتر است.

تابع خزش متناظر با طیف تاخیر گسسته $\{D_i, \lambda_i\}_{i=1}^3$

$$D(t) = D_0 + D_1(1 - e^{-t/\lambda_1}) + D_2(1 - e^{-t/\lambda_2}) + D_3(1 - e^{-t/\lambda_3}), \quad (11)$$

نیز دارای هفت پارامتر است که با معکوس کردن معادله انتگرال (8پ) بدست می آیند. شیوه ساده برای انجام این کار، قضیه پیوستگی بخش 2 ب می باشد. جزییات در پیوست ارایه شده اند. با تعریف

$$D_\infty = D_0 + D_1 + D_2 + D_3 \quad (12)$$

و

$$E_0 = E_\infty + E_1 + E_2 + E_3, \quad (13)$$

می توان به آسانی نشان داد که

$$D_0 = \frac{1}{E_0} \text{ and } D_\infty = \frac{1}{E_\infty}. \quad (14)$$

جدول 1 در بر گیرنده یک مثال از طیف استراحت سه مودی گسسته و طیف تاخیر سه مودی متناظر آن می باشد.

جدول 1: استراحت و طیف های تاخیر متناظر

i	E_i	τ_i	D_i	λ_i
0	10.0		0.1	
1	1.0	0.1	0.0092	0.1101
2	7.0	1.0	0.1105	3.0115
3	1.0	5.0	0.7803	15.0784
∞	1.0		1.0	

توابع خزش و استراحت متناظر در شکل 2 نشان داده شده اند. تغییر شکل میله در زمان t ، $\Delta l_b(t)$ با معادله (8)

الف) بدست می آید. با نوشتن $\alpha = A_b / l_b k_s h$ ، معادله به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\Delta l_b(t) + \alpha \int_0^t E(t - \xi) d\dot{l}_b(\xi) d\xi + \alpha \Delta l_b^0 E(t) = \Delta l, \quad (15)$$

که از آن تبدیل لاپلاس تغییر شکل به صورت زیر خواهد بود

$$\overline{\Delta l_b}(s) = \frac{\Delta l}{s[1 + \delta s \bar{E}(s)]}. \quad (16)$$

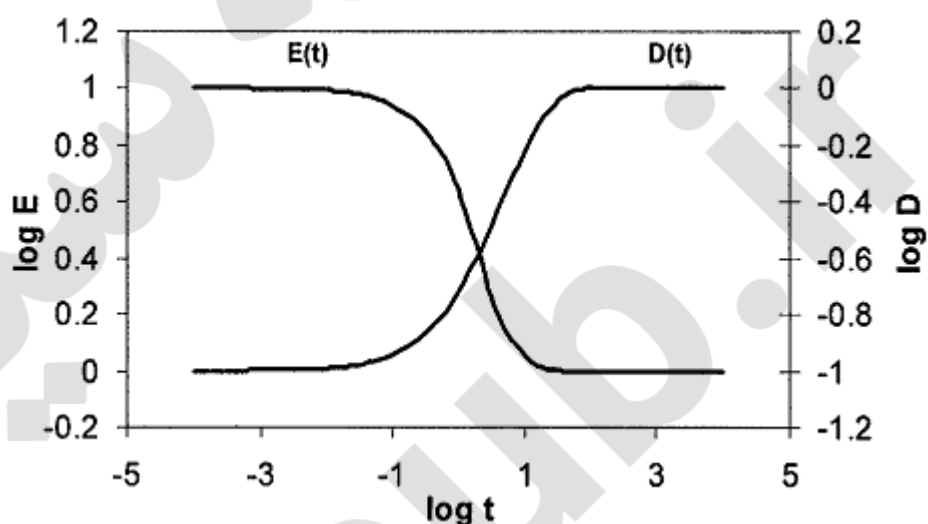
برای مدل هفت پارامتری، سمت راست معادله (16) را می توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{\Delta I}{(1 + \alpha E_0) \tau_1 \tau_2 \tau_3} \cdot \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)(1 + \tau_3 s)}{s(s^3 + As^2 + Bs + C)}, \quad (17)$$

که در آن ثابت های A ، B و C به صورت زیر بدست می آیند

$$A = \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3} \right) - \frac{\alpha}{1 + \alpha E_0} \left(\frac{E_1}{\tau_1} + \frac{E_2}{\tau_2} + \frac{E_3}{\tau_3} \right),$$

$$B = \left(\frac{1}{\tau_1 \tau_2} + \frac{1}{\tau_2 \tau_3} + \frac{1}{\tau_3 \tau_1} \right) - \frac{\alpha}{1 + \alpha E_0} \left[\frac{E_1}{\tau_1} \left(\frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3} \right) + \frac{E_2}{\tau_2} \left(\frac{1}{\tau_3} + \frac{1}{\tau_1} \right) + \frac{E_3}{\tau_3} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \right],$$



شکل 2: منحنی های خزش و استراحت برای پارامترها در جدول 1

$$C = \frac{1 + \alpha E_\infty}{1 + \alpha E_0} \cdot \frac{1}{\tau_1 \tau_2 \tau_3}. \quad (18)$$

تبدیل معکوس لاپلاس معادله (16) را می توان با توجه به سه ریشه $-a$ ، $-b$ و $-c$ معادله درجه سوم یافت:

$$(s + a)(s + b)(s + c) \equiv s^3 + As^2 + Bs + C = 0. \quad (19)$$

با فرض این که این ریشه ها مجزا هستند، می توان گفت که تغییر شکل در میله به شکل زیر خواهد بود

$$\Delta l_b(t) = \Delta l_\infty - [\Delta l_1 e^{-at} + \Delta l_2 e^{-bt} + \Delta l_3 e^{-ct}] = \Delta l_0 + \Delta l_1(1 - e^{-at}) + \Delta l_2(1 - e^{-bt}) + \Delta l_3(1 - e^{-ct}). \quad (20)$$

ضرایب را می توان با استفاده از اتحاد زیر ساده کرد:

$$\tau_1 \tau_2 \tau_3 abc = \frac{1 + \alpha E_\infty}{1 + \alpha E_0},$$

ومی توان آن را به صورت زیرنوشت

$$\Delta l_0 = \frac{\Delta l}{1 + \alpha E_0}, \quad \Delta l_\infty = \frac{\Delta l}{1 + \alpha E_\infty},$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_\infty (1 - \tau_1 a)(1 - \tau_2 a)(1 - \tau_3 a) \frac{bc}{(a - b)(1 - c)},$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_\infty (1 - \tau_1 b)(1 - \tau_2 b)(1 - \tau_3 b) \frac{ca}{(b - c)(b - a)},$$

$$\Delta l_3 = \Delta l_\infty (1 - \tau_1 c)(1 - \tau_2 c)(1 - \tau_3 c) \frac{ab}{(c - a)(c - b)}. \quad (21)$$

با در نظر گرفتن تابع خزش (11)، دقیقاً همانند قبل معادله (8) را می توان طوری حل کرد که نیروی وارده بر میله را به دست دهد. این معادله به شکل ذیل است

$$F_b(t) = F_\infty + F_1 e^{-at} + F_2 e^{-bt} + F_3 e^{-ct} = F_0 - F_1(1 - e^{-at}) - F_2(1 - e^{-bt}) - F_3(1 - e^{-ct}), \quad (22)$$

که a ، b و c ثابت های (زمان متقابل) یکسان برای تغییر شکل در (20) می باشند. ثابت های دیگر در (22) با معادله زیر بدست می آیند

$$F_0 = \frac{\alpha k_s \Delta l}{\alpha + D_0} = \left(\frac{A_b}{l_b} E_0 \right) \Delta l_0, \quad F_\infty = \frac{\alpha k_s \Delta l}{\alpha + D_\infty} = \left(\frac{A_b}{l_b} E_\infty \right) \Delta l_\infty,$$

$$F_1 = -F_\infty (1 - \lambda_1 a)(1 - \lambda_2 a)(1 - \lambda_3 a) \frac{bc}{(a-b)(a-c)},$$

$$F_2 = -F_\infty (1 - \lambda_1 b)(1 - \lambda_2 b)(1 - \lambda_3 b) \frac{ca}{(b-c)(b-a)},$$

جدول 2: ثابت های A, B, C, a-b-c با $\alpha=1$

A	9.6364
B	4.4182
C	0.3636
a	0.1070
b	0.3711
c	9.1583

$$F_3 = -F_\infty (1 - \lambda_1 c)(1 - \lambda_2 c)(1 - \lambda_3 c) \frac{ab}{(c-a)(c-b)}. \quad (23)$$

این که نرخ تجزیه برای سرعت در معادله (22) برابر با نرخ تجزیه برای تغییر شکل در معادله (20) می باشد، جای تعجبی ندارد زیرا نیرو و تغییر شکل بر اساس معادله (8پ) با یک دیگر ارتباط خطی دارند. از نظر فیزیکی، دلیل این است که هیچ گونه نیروی وابسته به زمان برای ایجاد تاخیر زمانی بین تنش و کرنش وجود ندارد.

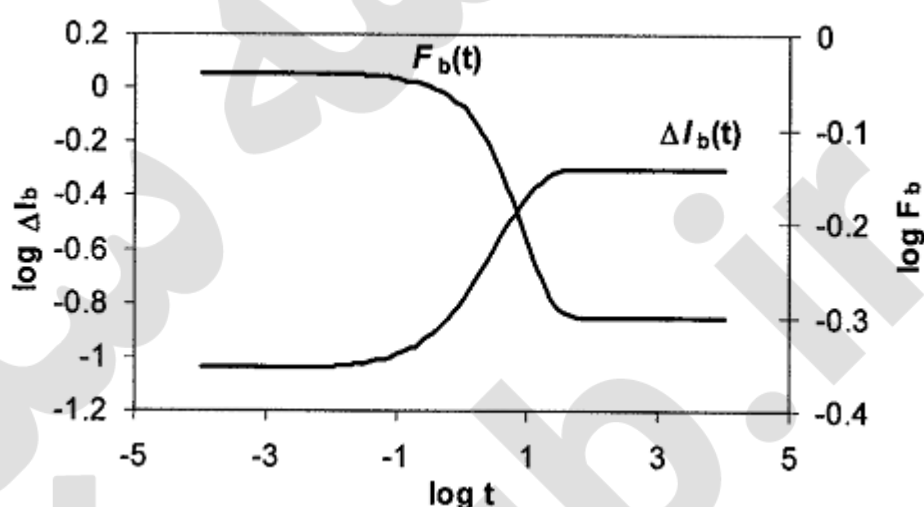
این رفتار با استفاده از طیف های استراحت و تاخیر در جدول 1 نشان داده شده است. پارامتر های زیر انتخاب شدند: $\Delta l = 1, k_s = 1, l_b = 100, A_b = 100$ و $\alpha = 1$. مقادیر ثابت ها در معادلات 19 و 20 در جدول 2

نشان داده شده اند در حالی که توابع $\Delta l_b(t)$ و $F_b(t)$ در شکل 3 نشان داده شده اند.

برای ایجاد ورودی ها در جداول 1 و 2 تا چهار رقم اعشار، کار با صحت حداقل هشت رقم اعشار لازم بود.

4- روش های عددی

برای تکمیل خصوصیات روش، یک الگوریتم عددی برای حل مسائل معکوس مربوط به معادلات (8 الف) و (8 ب) بایستی ارایه شود. الگوریتم بایستی از حیث اندازه گیری های آزمایشی تغییر شکل $\Delta l_b(t)$ اختیار شده در شبکه زمان گسسته $\{t_n\}$ ثابت باشد که به طور کلی غیر یکنواخت خواهد بود. به علاوه، صحت مقادیر محاسبه شده $\{E(t_n)\}$ و $\{D(t_n)\}$ بایستی طوری باشد که شرط تبدیل داخلی (8 ت) در همه مقادیر t_n را در یک توالانس قابل قبول داشته باشد. به عبارت دیگر، قضیه پیوستگی بایستی به طور عددی در چارچوب صحت تعیین شده برقرار باشد.



شکل 3: ازدیاد طول و نیرو در میله

الف: یک الگوریتم پایدار برای مدول استراحت $E(t)$ و وادادگی خزشی $D(t)$

معادله (8 الف) یک مسئله معکوس برای تعیین تابع استراحت از اندازه گیری های تغییر شکل است در حالی که معادله (8 ب) بیانگر یک مسئله معکوس برای تعیین تابع وادادگی خزشی از اندازه گیری های نیرو است. با این حال، هر دوی این معادلات را می توان به شکل مسائل مستقیم نوشت. از این روی (8 الف) را می توان به شکل زیر بازنویسی کرد

$$E(t) - \frac{1}{\Delta l_b(0)} \int_0^t E(\xi) \frac{d\Delta l_b(t-\xi)}{d\xi} d\xi = \frac{\Delta l - \Delta l_b(t)}{\alpha \Delta l_b(0)}. \quad (24)$$

مدول $E(t)$ بر روی یک شبکه گسسته را می توان به طور تکراری از روش انتگرالسیون تفاضل محدود که اولین بار توسط لی و راجرز (1963) ارایه شد بدست آورد. با این حال یک جمله اضافی در معادله (24) وجود دارد که در

معادلات انتگرال ولترای حل شده توسط لی و راجرز وجود ندارد. اگرچه استفاده از این جمله منبع به طور عددی زیاد مهم نیست با این وجود موجب تغییر معیار پایداری در کار اصلی لی و راجرز می شود. در $t=0$ ، $E(0)$ مقدار زیر را اختیار می کند

$$E(0) = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\Delta l}{\Delta l_b(0)} - 1 \right]. \quad (25)$$

در حالی که در زمان های بعدی $t=t_n$ می توان معادله (24) را با استفاده از تکرار حل کرد

$$E(t_n) = \frac{2\Delta l - 2\Delta l_b(t_n) + \alpha E(t_{n-1})[\Delta l_b^0 - \Delta l_b(t_n - t_{n-1})] + \alpha \sum_{i=1}^{n-1} [E(t_i) + E(t_{i-1})][\Delta l_b(t_n - t_i) - \Delta l_b(t_n - t_{i-1})]}{\alpha[\Delta l_b^0 + \Delta l_b(t_n - t_{n-1})]}. \quad (26)$$

مخرج در معادله (26) شکل متفاوتی از مخرج ارایه شده توسط لی و راجرز است. معیار برای پایداری طرح تکراری به صورت زیر است

$$\left| \frac{\Delta l_b^0 - \Delta l_b(t_n - t_{n-2})}{\Delta l_b^0 + \Delta l_b(t_n - t_{n-1})} \right| \leq 1. \quad (27)$$

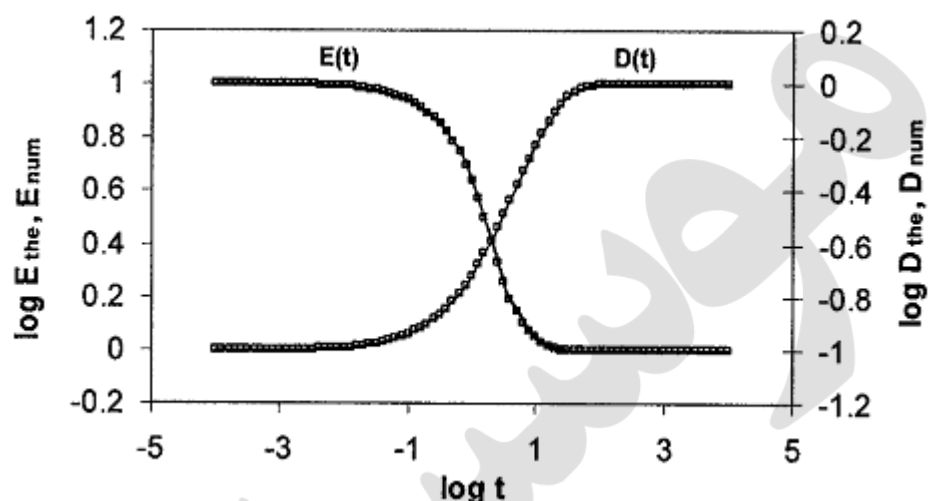
می توان نشان داد که معیار (شرط) پایداری برای همه مقادیر مثبت متناهی پارامتر α برقرار است، به شرط این که مرحله زمانی بزرگ تر از $2\Delta l_0/(\Delta l_b)$ نباشد. به عبارت دیگر می توان گفت که معیار پایداری برای همه مقادیر مثبت متناهی از ثابت فنر k_s برقرار است. اثبات از یکنواختی تغییر شکل $\Delta l_b(t)$ استفاده می کند که ویژگی مهم برای پایداری مطرح شده توسط هاپکینز و هامینگ (1957) است.

$$D(0) = \alpha \left[\frac{k_s \Delta l}{F_b(0)} - 1 \right], \quad (28)$$

و مقادیر دنباله (متوالی) به طور تکراری از معادله زیر بدست می آید

$$D(t_n) = \frac{2\alpha k_s \Delta l - 2\alpha F_b(t_n) + D(t_{n-1})[F_b(0) - F_b(t_n - t_{n-1})] + \sum_{i=1}^{n-1} [D(t_i) + D(t_{i-1})][F_b(t_n - t_i) - F_b(t_n - t_{i-1})]}{[F_b(0) + F_b(t_n - t_{n-1})]}. \quad (29)$$

معیار پایداری برای تکرار (29) به صورت زیر است



شکل 4: مقایسه منحنی های عددی و تحلیلی برای $E(t)$ و $D(t)$

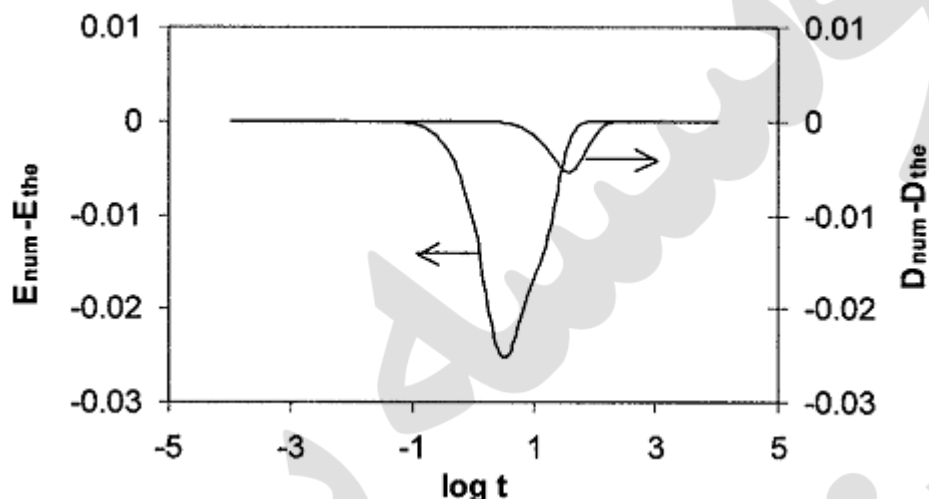
$$\left| \frac{F_b(0) - F_b(t_n - t_{n-2})}{F_b(0) + F_b(t_n - t_{n-1})} \right| \leq 1, \quad (30)$$

که برای همه مقادیر مثبت α مستقل از مرحله زمانی معتبر است. چون نسبت هادر (27) و (30) هر دو تابعی از ثابت فر k_s می باشد و یک مقدار بهینه برای این ثابت از نظر عددی، این است که کدام یک مقدار بیشینه هر دو نسبت را در همه زمان ها کمینه می کنند. مجددا باید گفت که تعیین این موضوع مسئله ساده ای نیست. برای نشان دادن پایداری و صحت الگوریتم، تکرار های (26) و (29) را در یک شبکه زمانی متشکل از 101 t_n زمانی گسسته انجام می دهیم که توزیع نمایی در بازه $10^{-4} \leq t \leq 10^4$ داشته و یا به طور معادل، در $\log t$ در بازه $[-4, 4]$ یکنواخت است.

مقادیر دقیق $\Delta l_b(t_n)$ و $F_b(t_n)$ در شبکه زمان از راه حل های فرم بسته (20) و (22) با استفاده از مدل با پارامتر ها در جداول 1 و 2 بدست می آیند با این حال درون یابی خطی برای یافتن مقادیر جدا از شبکه $\Delta l_b(t_n - t_k)$ و $F_b(t_n - t_k)$ استفاده می شود. از این روی هیچ گونه خطای اندازه گیری متصل به شبکه وجود ندارد با این حال، خطا های درون یابی جدا از شبکه وجود دارند. خطا های عددی اضافی در تربیع با اختیار کردن مقادیر میاتگین $E(t)$ و $D(t)$ در هر بازه زمانی فرعی ایجاد می شوند.

منحنی های عددی و تحلیلی در شکل 4 نشان داده شده و از یکدیگر بر روی مقیاس لگاریتمی-لگاریتمی نمودار قابل تمایز هستند. خطاهای مطلق پیش بینی عددی مدول استراحت و وادادگی خزش در شکل 5 نشان داده

شده اند. در واقع، بیشترین خطاها مربوط به مناطق با بیشترین شیب می باشند و در این مناطق، خطاها در پیش بینی تابع استراحت بزرگ تر از خطاها برای وادادگی خزش می باشند، نتیجه ای که توسط سایر محققان نیز گزارش شده است (هاپکینز و هامینک 1957، کنوف و هاپکینز 1972).



شکل 5: خطاهای مطلق در راه حل عددی $E(t)$ و $D(t)$

ماکزیمم خطاهای نسبی، در $E(t)$ و $D(t)$ به ترتیب 1 و 0.6 درصد می باشند.

ب: ارزیابی عددی شرط تبدیل درونی

از نقطه نظر تحلیلی، توابع استراحت و وادادگی خزشی بدست آمده از معادلات (8 الف) و (8 ب) به طور خودکار شرط تبدیل درونی را خواهند داشت (8 ب). به منظور ارزیابی روش این مقاله، اکنون بایستی نشان داد که شرط تبدیل درونی در چارچوب صحت قابل قبول برای مقادیر عددی $E(t)$ و $D(t)$ برقرار است. این مسئله به هیچ وجه

آسان نیست زیرا چندین منبع خطا در محاسبه انتگرال کانولوشن در (8 ت) وجود دارد یعنی

الف: خطاهای اندازه گیری و درون یابی تغییر شکل $\Delta l_b(t)$ که خطاهای داده در (8 الف) و (8 ب) را تشدید می کند

ب: خطاهای گسسته سازی در راه حل ولترای بخش 4 الف اعمال شده به (8 الف) و (8 ب)

پ: خطاهای تربیع (یک چهارم) در ارزیابی کانولوشن

ت: خطای برش ناشی از کمبود اطلاعات نزدیک به $t=0$ و

ث: خطاهای درون یابی در ارزیابی مقادیر جدا از شبکه $E(t)$ و $D(t)$.

در نبود خطاهای اندازه گیری در (الف)، در زیر نشان داده شده است که پ و ث، غالب ترین منابع خطا هستند. در ابتدا دو انتگرال کانولوشن را در نظر بگیرید

$$C_1(t) = \int_0^t D(t-\xi)E(\xi)d\xi, \quad (31a)$$

$$C_2(t) = \int_0^t E(t-\xi)D(\xi)d\xi. \quad (31b)$$

از نظر تحلیلی، هر دو معادل هستند و شرط تبدیل درونی (8ت) را می توان به شکل زیرنوشت

$$C_1(t) = C_2(t) = t.$$

با این حال وقتی این دو انتگرال کانولوشن به طور تحلیلی محاسبه شوند، به طور کلی متفاوت خواهند بود و این یکی از مزایای منحصر به فرد محاسبه هر دوی آن هاست زیرا یک ترکیبی از دو نتیجه را می توان برای کاهش خطای عددی مورد استفاده قرار داد.

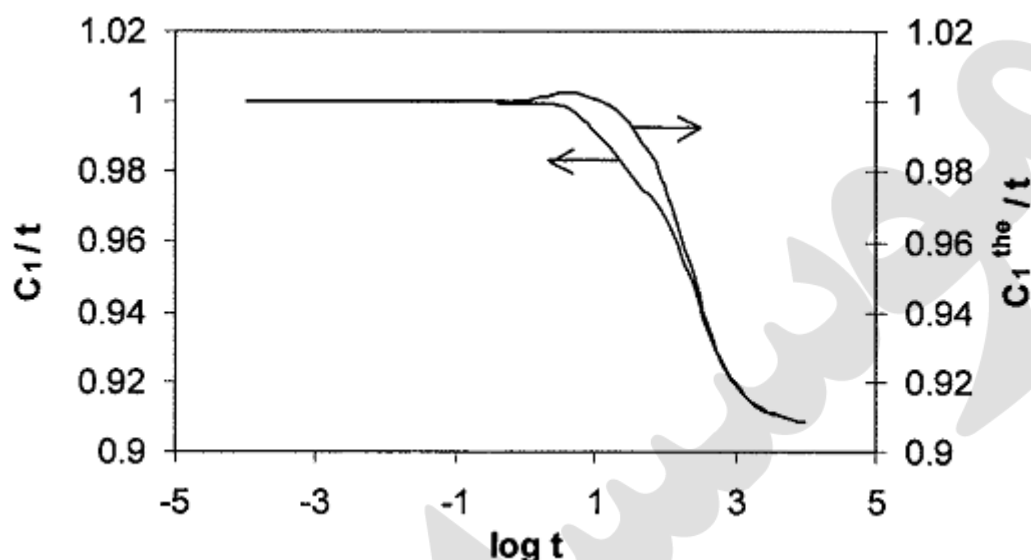
به ویژه اگر فرضاً μ ثابت باشد، و فرض شود که

$$C(t) = (1 - \mu)C_1(t) + \mu C_2(t). \quad (32)$$

از نظر تحلیلی می دانیم که $C(t) = C_1(t) = C_2(t)$ به ازای همه مقادیر μ صادق است. با این حال از نظر عددی، مقدار μ را می توان برای کاهش خطا در $C(t)$ از طریق حذف خطاها در $C_1(t)$ و $C_2(t)$ انتخاب کرد. این رویکرد همان طور که در ادامه بررسی شده است می تواند بسیار موثر باشد.

فرض کنید که دو انتگرال کانولوشن (31 الف) و (31 ب) با استفاده از قاعده ذوزنقه مرکب به صورت زیر گسسته سازی شوند:

$$C_1(t_n) \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [D(t_n - t_{i-1})E(t_{i-1}) + D(t_n - t_i)E(t_i)](t_i - t_{i-1}), \quad (33a)$$



شکل 6: مقایسه نتایج تربیع ذودنقه از (33 الف) با استفاده از داده های دقیق و غیر دقیق متصل به شبکه

$$C_2(t_n) \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [E(t_n - t_{i-1})D(t_{i-1}) + E(t_n - t_i)D(t_i)](t_i - t_{i-1}). \quad (33b)$$

مقادیر جدا از شبکه E و D در زمان های $t_n - t_k$ با درون یابی خطی در بازه زمانی فرعی مناسب بدست می آیند. در ابتدا ما نشان می دهیم که خطاهای حاصل از روش ولترا (منبع ب) از اهمیت کم تری برخوردار هستند. با استفاده از مقادیر دقیق $E(t)$ و $D(t)$ متصل به شبکه بدست آمده از معادلات 10 و 11 با پارامترها در جدول 1 و با استفاده از درونیابی خطی جدا از شبکه، کانولوشن در (33 الف) را محاسبه کرده و نتایج با $\{C_1^{the}(t_n)\}$ نشان داده می شود. سپس ما محاسبه را در (33 الف) ولی این بار با استفاده از مقادیر عددی $E(t)$ و $D(t)$ متصل به شبکه بدست آمده از تکرارهای والتر (26) و (29)، تکرار می کنیم. این نتایج با $\{C_1(t_n)\}$ نشان داده می شوند. هر گونه تفاوت بین دو مجموعه از نتایج ناشی از خطاهای حاصل از روش والتر خواهد بود.

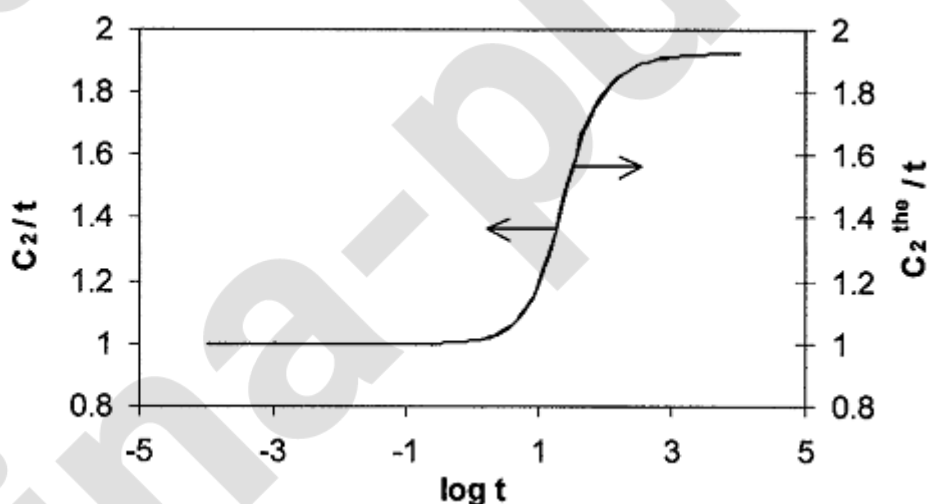
نمودار دو مجموعه از کانولوشن های گسسته $\{C_1(t_n)\}$ و $\{C_1^{the}(t_n)\}$ محاسبه شده از (33 الف) نسبت به مقادیر دقیق آن ها t در مقیاس خطی-لگاریتمی در شکل 6 نشان داده شده است.

در بازه $10^{-4} \leq t \leq 1$ ، هر دو کانولوشن هم خوانی نزدیکی با مقدار دقیق t دارد با این حال با افزایش t تا 10^4 ، مقدار دقیق تا 9 درد در هر مورد کم تر از مقدار واقعی پیش بینی می شود.

با این حال، بر اساس شکل می توان گفت که این که آیا داده های دقیق یا غیر دقیق در کانولوشن های گسسته استفاده شده اند یا خیر زیاد مهم نیست که نشان می دهد بیشترین خطا ها از منابع پ و ث ناشی می شوند. محاسبات یکسان اکنون برای دومین کانولوشن گسسته نشان داده می شوند (33ب). شکل 7 تفاوت بین استفاده از داده های دقیق و غیر دقیق در کانولوشن در مقایسه با مقدار دقیق t را نشان می دهد. این تفاوت در مقیاس لگاریتم خطی قابل تمیز است. در زمان های بزرگ تر نزدیک به 10^4 ، فکانولوشن گسسته (33ب)، مقدار دقیق آن t را تا حدود 90 درصد بیش تر از مقدار واقعی پیش بینی می کند خواه داده های دقیق استفاده شوند یا غیر دقیق. بنابر این دومین فرمول (33ب) صحت بسیار کم تری از اولین فرمول (33الف) دارد. در شکل 8، ما نسبت به مقدار تربیع دقیق t ، سه مقدار تربیع $C(t)$ با یک مقدار $C_1(t)$ ، $\mu=0.09$ و $C_2(t)$ بدست آمده از (32)، (33 الف) و (33 ب) را مقایسه کردیم. این گزینه μ ، خطا را در $C(t)$ تا 4 درصد کاهش می دهد. بنابر این بایستی گفت که چگونه انتخاب μ را می توان انجام داد.

از شکل 8 می توان دید که خطا های درون یابی/تربیع بزرگ تر با (33 الف) و (33ب) تقریباً الف: علامت مخالف دارند و

ب: با افزایش t ، به طور تقریباً متناسب رشد می کند.



شکل 7: مقایسه نتایج تربیع ذوزنقه از (35ب) با استفاده از داده های متصل به شبکه دقیق یا غیر دقیق

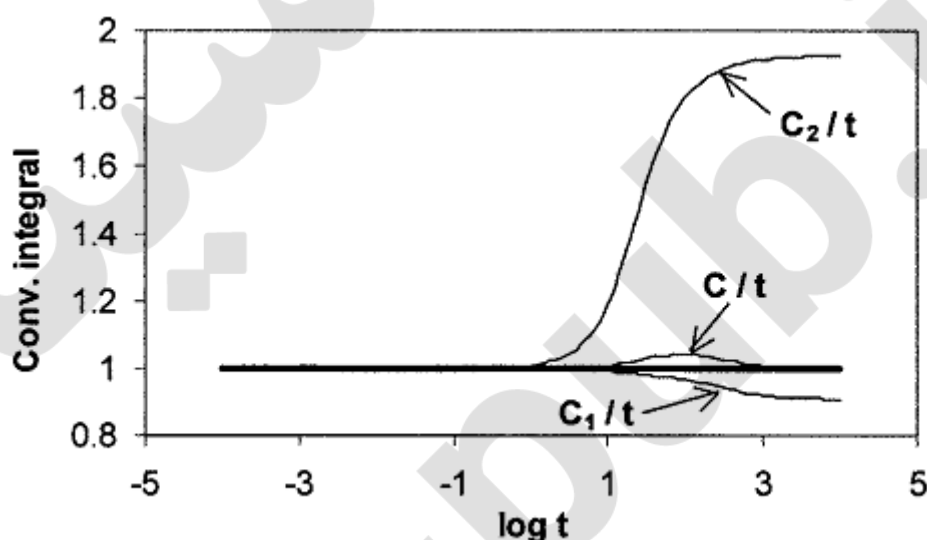
مشاهده الف نشان می دهد که میانگین گیری از دو برآورد موجب کاهش خطا می شود. مشاهده 2 به طور ضمنی نشان می دهد که دو توزیع خطا را می توان با ضریب شکل تقریباً یکسان توصیف کرد. در صورتی که ضریب

شکل مشترک را با $\Xi(t)$ نشان دهیم، و دو مقیاس با علامت مخالف را انتخاب کنیم، می توان خطاها را به شکل زیر نوشت

$$C(t) - C_1(t) = \left(\frac{-\mu}{1-2\mu} \right) \Xi(t), \quad (34a)$$

$$C(t) - C_2(t) = \left(\frac{1-\mu}{1-2\mu} \right) \Xi(t), \quad (34b)$$

که μ یک ثابتی است که در زیر انتخاب شده است. در این جا $C(t)$ به طور ضمنی بیانگر مقدار دقیق انتگرال کانولوشن (31 الف) یا (31 ب) می باشد در حالی که $C_1(t)$ و $C_2(t)$ بیانگر تقریب عددی (33 الف) و (33 ب) است. حذف ضریب شکل مجهول $\Xi(t)$ بین این دو معادلات، معادله (32) را می دهد.



شکل 8: مقایسه سه برآورد تربیع $C(t)$ ، $C_1(t)$ و $C_2(t)$ نسبت به مقدار تربیع دقیق t

محور عمودی شکل: انتگرال کانولوشن

بدیهی است که می توان ترکیب خطی را در معادله (32) در مقدار انتخاب شده t با انتخاب مناسب μ دقیق تر کرد. فرض کنید که اتحاد $C(t^*) = t^*$ در یک نقطه $t = t^*$ باشد. این مستلزم انتخاب μ می باشد:

$$\mu = \frac{t^* - C_1(t^*)}{C_2(t^*) - C_1(t^*)}. \quad (35)$$

در صورتی که مقدار t^* را به صورت دقیق انتخاب کنیم، آنگاه ترکیب خطی (32) همراه با گزینه μ در (35)، خطاها را مجدداً توزیع کرده و منجر به حذف می شود. چون خطاها در دوره زمانی طولانی، بیشترین مقدار بودند، $t^* = 10^4$ انتخاب شد که یک مقدار $\mu \approx 0.09$ را بدست می دهد. همان طور که در شکل 8 می توان دید، بهبود صحت معنی دار بوده است و خطای بیشینه 90 درصد در $C_2(t)$ تا تنها 4 درصد در $C(t)$ کاهش یافته است. توزیع خطای جدید نیز بسیار متفاوت است، و اکنون خطای بیشینه در $t \approx 100$ رخ می دهد. البته، قاعده تربیع مرتبه بالاتر و درون یابی مرتبه بالاتر را می توان برای کاهش خطاهای کانولوشن مورد استفاده قرار داد، با این حال این موضوع، هدف مقاله حاضر نیست. این مسئله اثبات شده است که با استفاده از روش پیشنهادی هر دو توابع خزشی و استراحت را می توان به طور هم زمان از یک آزمایش تعیین کرد و این که آن ها شرط تبدیل درونی را در یک تولرانس قابل قبول برآورده می کنند.

5- نتیجه گیری

یک چارچوب نظری برای اندازه گیری هم زمان توابع استراحت و وادادگی خزشی با یک آزمایش بارگذاری فنر ارائه شد. نشان داده شده است که الگوریتم عددی تکراری پیشنهادی برای تعیین هر دو $D(t)$ و $E(t)$ پایدار است و نتایجی را به دست می دهد که با محدودیت تبدیل درونی در تولرانس قابل قبول هم خوانی دارد. هم چنین نشان داده شده است که در محاسبه کانولوشن های گسسته طولانی بایستی دقت شود. خطاهای عددی را می توان با محاسبه دو برآورد بدست آمده از معکوس سازی مرتبه کانولوشن و استفاده از یک ترکیب خطی مناسب از دو برآورد کاهش داد. این رویکرد را می توان به عنوان جایگزینی برای افزایش تعداد نقاط داده های اندازه گیری شده در هر واحد زمانی مورد استفاده قرار داد به ویژه زمانی که این کار از نظر آزمایشی پرهزینه و یا غیر ممکن باشد. همه داده های ارائه شده در این کار شبیه سازی شده اند. روش های عددی پیشرفته بر اساس درون یابی اسپلاین یا همسازی ممکن است در زمان بررسی داده های آزمایشی نیاز باشند.

چارچوب ریاضی توسعه داده شده که در این جا ارائه شد، می تواند به عنوان یک تئوری بنیادین برای دستگاه های نسل جدید به منظور مشخص کردن رفتار وابسته به زمان پلی مر های جامد در رژیم ویسکو الاستیک خطی عمل کند. با این حال، با تعیین هم زمان دو تابع خزش و استراحت، می توان تعیین کرد که آیا توابع تعیین شده، شرط

خطی(8ت) را برآورده می کنند یا خیر. در صورتی که این مسئله صادق نباشد، آنگاه رفتار ماده خارج از رژیم ویسکو الاستیک خطی خواهد بود. رویکرد ترکیبی محاسباتی-آزمایشی ارایه شده در این جا را می توان برای تعیین آستانه خطی- ویسکوالاستیک مواد پلیمری مورد استفاده قرار داد.

پیوست: تعیین دقیق طیف تاخیر گسسته از طیف استراحت گسسته

در این پیوست، ما نشان می دهیم که زمان های تاخیر $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ را می توان به صورت صفر های چند جمله ای با درجه N تعیین کرد که ضرایب آن ها تابعی از طیف استراحت $\{E_k, \tau_k\}_{k=1}^N$ است. این به خودی خود یک نتیجه جدید نیست، بلکه الگوریتم پیشنهادی ما امکان تحلیل درجه ناپایداری را در فرایند تبدیل درونی می دهد. ما از قضیه پیوستگی در بخش 2 ب استفاده کرده و نشان می دهیم که توابع استراحت و خزش بدست آمده از معادلات 8 الف و پ، با توجه به تغییر شکل به طور خودکار متناسب با معادله 8ت می باشند. هم چنین ما معادله جبری را برای مورد $N=3$ ارایه می کنیم که به آسانی قابل تعمیم به هر مقدار N است.

در ابتدا سه ریشه $-a, -b, -c$ را از معادله درجه سوم (19) بدست می آوریم. سپس، با جایگزینی $\Delta l_b(t)$ و $F_b(t)$ در (20) و (22) در (8پ) و مقایسه ضرایب عبارات نمایی، می توان مشاهده کرد که ثابت ها از طریق معادله زیر با هم ارتباط دارند

$$F_i = k_s \Delta l_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

از این روی، از 21 و 23 می توان یافت:

$$(1 - \lambda_1 a)(1 - \lambda_2 a)(1 - \lambda_3 a) = f(a),$$

$$(1 - \lambda_1 b)(1 - \lambda_2 b)(1 - \lambda_3 b) = f(b),$$

$$(1 - \lambda_1 c)(1 - \lambda_2 c)(1 - \lambda_3 c) = f(c),$$

که

$$f(x) = - \frac{(1 - \tau_1 x)(1 - \tau_2 x)(1 - \tau_3 x)}{\alpha E_\infty}$$

گشتاور های

$$X_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3),$$

$$X_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1,$$

$$X_3 = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$

را می توان با حل سیستم ماتریس محاسبه کرد

$$\begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a) - 1 \\ f(b) - 1 \\ f(c) - 1 \end{pmatrix}. \quad (A1)$$

زمانهای تاخیر $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ با سه ریشه معادله بدست می آیند

$$s^3 + X_1s^2 + X_2s + X_3 = 0$$

این ظاهراً، ساده ترین روش جبری برای بدست آوردن زمان های تاخیر گسسته از طیف استراحت در مورد مدل GKV می باشد. ما قبلاً در مورد بد مطرح شدن تبدیل درونی یک طیف به طیف دیگر بحث کردیم که دلیل آن این است که معادله (8) یک معادله انتگرال ولترای نوع اول است. رویکرد جبری بر این مسائل بد مطرح¹ غلبه نمی کند. در رابطه با مدل GKV با N عنصر، N زمان تاخیر $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ با صفر های چند جمله ای درجه N بدست می آید که در آن ضرایب چند جمله ای، توابع ساده از طیف استراحت می باشد. اگرچه، می توان صفر ها را با صحت دلخواه با استفاده از بسته های نرم افزار ریاضی نظیر MAPLE محاسبه کرد، مسئله بد مطرح شدن تبدیل درونی به خودی خود در حساسیت صفر ها به تغییرات بسیار کوچک در ضرایب نمایان می شود. از این روی، تغییرات کوچک در طیف استراحت منجر به تغییرات کوچک در ضرایب می شود که به نوبه خود منجر به تغییرات بسیار بزرگ در یک یا چند صفر می شود به خصوص زمانی که N افزایش می یابد.

تحلیل کمی این مسئله را می توان با اظهار این که ماتریس های A1 در بالا و A2 پایین، ماتریس های وندرموند هستند انجام داد. بد وضعی² این ماتریس ها کاملاً مشهود است. کاتسچی (1975 الف، ب) نشان داده است که تعداد شرط آن ها به طور نمایی با افزایش مرتبه ماتریس رشد می کند و هم چنین تعداد شرایط بستگی به توزیعات گره (اندازه درایه) دارد. یک تحقیق بسایر مفید اخیراً توسط لی (2005) انجام شده است.

¹ ill-posedness
² ill conditioning

تعیین دقیق وادادگی های گسسته $\{D_k\}_{k=1}^3$ از طیف استراحت $\{E_k, \tau_k\}_{k=1}^3$ لازم است. هم چنین لازم به ذکر است که تعمیم به مقادیر بزرگ N ، ساده است. با تبدیلات لاپلاس معادلات 10 و 11 می توان یافت:

$$s\bar{E}(s) = E_\infty + \sum \frac{E_k \tau_k s}{1 + \tau_k s},$$

$$s\bar{D}(s) = D_\infty - \sum \frac{D_k \lambda_k s}{1 + \lambda_k s}.$$

توسعه این مجموعهات به توان S و جایگزینی نتایج در معادله (9) می دهد

$$\left[E_\infty + \sum E_k \tau_k s \{1 - \tau_k s + (\tau_k s)^2 - \dots\} \right] \left[D_\infty - \sum D_k \lambda_k s \{1 - \lambda_k s + (\lambda_k s)^2 - \dots\} \right] = 1.$$

مقایسه توان های S در هر دو طرف این معادله می دهد

$$E_\infty D_\infty = 1,$$

$$-E_\infty \sum \lambda_k D_k + D_\infty \sum \tau_k E_k = 0,$$

$$E_\infty \sum \lambda_k^2 D_k - \left(\sum \lambda_k D_k \right) \left(\sum \tau_k E_k \right) - D_\infty \sum \tau_k^2 E_k = 0,$$

$$-E_\infty \sum \lambda_k^3 D_k + \left(\sum \lambda_k^2 D_k \right) \left(\sum \tau_k E_k \right) + \left(\sum \lambda_k D_k \right) \left(\sum \tau_k^2 E_k \right) + D_\infty \sum \tau_k^3 E_k = 0.$$

از این روی، وادادگی های D_k را می توان با حل سیستم ماتریس

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad (A2)$$

با

$$\alpha_1 = \frac{1}{E_\infty^2} \sum \tau_k E_k,$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{E_\infty^2} \sum \tau_k^2 E_k + \frac{1}{E_\infty} \left(\sum \tau_k E_k \right) \alpha_1,$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{E_\infty^2} \sum \tau_k^2 E_k + \frac{1}{E_\infty} \left(\sum \tau_k^2 E_k \right) \alpha_1 + \frac{1}{E_\infty} \left(\sum \tau_k E_k \right) \alpha_2.$$

بدست آورد.