

اوزان بهینه در مدل های تحلیل پوششی داده ها با محدودیت های وزن

چکیده :

بر طبق تفسیر مرسوم از یک مدل تحلیل پوششی داده مضربی، اوزان بهینه آن در بهترین حالت یک واحد تصمیم گیری تحت ارزیابی موسوم به DMU را در مقایسه با همه واحد های تصمیم گیری مشاهده شده نشان می دهند. برای مدل های مضربی با محدودیت های وزنی اضافی، این تفسیر به طور کلی ناصحیح و غلط می باشد (به ویژه اگر محدودیت های وزنی به صورت پیوسته یا ناهمگن باشند) و معنی اوزان بهینه در این مدل ها به صورت مبهم باقی مانده است. در این مقاله، ما اثبات می کنیم که به ازای هر گونه محدودیت های وزنی، اوزان بهینه مدل مضربی، DMU را در بهترین حالت در مقایسه با کل فناوری توسعه داده شده توسط محدودیت های وزنی نشان می دهد. این نتیجه مطابق با این واقعیت است که مدل تحلیل پوششی مضاعف، واحد های تصمیم گیری DMU را در برابر همه DMU ها در فناوری و نه تنها در برابر واحد های تصمیم گیری مشاهده شده، نشان می دهند. مدل توسعه داده شده بر همه نگرانی های قبلی مربوط به استفاده از انواع خاص محدودیت های وزن در مدل های تحلیل پوششی داده ها غلبه کرده و تفسیری قوی و معنی دار از آن ها ارائه می کند.

کلمات کلیدی : تحلیل پوششی داده ها، مدل مضرب، محدودیت های وزن، مبادله (بده-بستان) تولید

1- مقدمه

تحلیل پوششی داده ها (DEA) یک رویکرد غیر پارامتری برای ارزیابی کارایی و بهره وری واحد های سازمانی می باشد (کوپر، سیفورد و تان 2007، تانسولیس، پارتلا و دسپیس 2008). واحد های سازمانی اشاره به واحد های تصمیم گیری دارند (DMU). مدل های تحلیل پوششی داده استاندارد بر مبنای این فرض هستند که فناوری تولید اصلی یا دارای بازده نسبت به مقیاس ثابت (CRS) یا بازده نسبت به مقیاس متغیر (VRS) می باشند. هر دو مدل های CRS و VRS را می توان به صورت دو برنامه خطی متغیر بیان کرد که اشاره به مدل های پوششی و مدل های مضربی دارد. ارزش بهینه این دو برنامه به صورت کارایی شعاعی ورودی یا خروجی DMU تحت ارزیابی، بسته به جهت حل مدل ها تفسیر می شود (بانگر، گارنز و کوپر 1984، کارنز و کوپر و رادز 1978).

به طور ویژه، در مدل پوششی، DMUO در برابر مرز فناوری CRS یا VRS معیار بندی می شود و کارایی شعاعی DMUO به صورت مهم ترین ضریب بهبود نسبی به بردار ورودی یا خروجی آن در فناوری تفسیر می شود. مدل های مضربی از حیث اوزان ورودی و خروجی متغیر (مضرب ها) بیان می شوند. مدل مضربی CRS موجب پیشینه سازی نسبت خروجی وزنی کل به ورودی وزن کل (نسبت کارایی) DMUO می شود به شرطی که هیچ یک از این نسبت ها در همه واحدهای تصمیم گیری مشاهده شده بیش از مقدار 1 نباشند. مدل مضرب VRS دارای یک متغیر دوگانه قابل تفسیر از حیث نسبت بازده به مقیاس و کشسانی مقیاس می باشد (بانکر و همکاران 1984، پودینوسکی، چمبرز، اتیسی، دینکو 2016، پودینوسکی و فورساند 2010، پودینوسکی، فورساند و کریونزوکو 2009، ساهو و تون 2015). به گفته کارنز و همکاران (1978)، اوزان خروجی و ورودی بهینه، مطلوب ترین اوزان برای DMUO می باشند و آن را در مقایسه با همه DMUO های مشاهده شده، به بهترین شکل ممکن نشان می دهد.

1-1 محدودیت های وزن

محدودیت های وزن معمولاً بیانگر قضاوت های ارزشی است که در شکل محدودیت های اضافی بر روی اوزان ورودی و خروجی در مدل مضرب گنجانده می شوند. این محدودیت ها موجب کاهش انعطاف پذیری اوزان و بهبود تمایز و افتراق مدل تحلیل پوششی داده ها می شود (الن، اتانسوپولوس، دیسون و تنانسولیوس 1997، کوک و زو 2008، جورو و کاروهنن 2015، نانوسیلیوس و همکاران 2008).

به طور کلی، استفاده از محدودیت های وزنی موجب تغییر تفسیر کارایی در هر دو مدل های پوششی و مضربی می شود. از دیدگاه فناوری، استفاده از محدودیت های وزنی منجر به توسعه مدل فناوری می شود (کارنز، کوپر، وی و هوان 1989، هالم و کروهنن 2000، رول، کوک و گولنی 1991). پودینوسکی (2004 الف) نشان داده است که این توسعه ناشی از جملات مضاعف در مدل پوششی ایجاد شده توسط محدودیت های وزنی می باشد و این که واحد تصمیم گیری در مرز فناوری توسعه یافته قرار می گیرد. بنابر این، DMUO در برابر همه واحدها در فناوری (از جمله واحد های تولید شده توسط محدودیت های وزنی) و نه تنها در برابر واحد های مشاهده شده، معیار بندی می شوند.

تفسیر کارایی از حیث مدل مضرری با محدودیت های وزنی تا حدودی مبهم و امروزه با نقص همراه است. این را می توان به صورت زیر خلاصه کرد: در صورتی که همه محدودیت های وزنی همگن و غیر پیوسته باشند (به بخش 2 برای تعریف رسمی مراجعه کنید)، مدل مضرری به طور صحیح اوزان بهینه (در محدودیت های وزنی معین) را شناسایی می کند که بیانگر واحد تصمیم گیری در بهترین حالت در مقایسه با همه DMU های مشاهده شده است (پودینوسکی 2001 الف).

با این حال، مسائل مربوط به تفسیر زمانی حادث می شوند که حداقل یک محدودیت وزنی، غیر همگن یا پیوسته باشد. در این صورت، اوزان بهینه به طور کلی بیانگر DMU در بهترین حالت در مقایسه با همه DMU های مشاهده شده نمی باشد. در نتیجه، ارزش بهینه مدل مضرری با این محدودیت وزنی، به طور کلی، کارایی نسبی DMU را کم تر از مقدار واقعی برآورد می کند. مثال های مربوط به این را می توان در مقاله پودینوسکی (1999، 2001 الف)، پودینوسکی و التانسپولوس 1998 و اخیراً مطالعه خلیلی، کامانهو، پرتلا و علی رضایی (2010) یافت.

2-1 اهمیت

در این مقاله ما نشان می دهیم که به ازای هر گونه محدودیت های وزنی، اوزان بهینه مدل مضرر DMU را در بهترین حالت نسبت به همه DMU ها در فناوری توسعه یافته تولید شده توسط محدودیت های وزنی نشان می دهد. این نتیجه در صورتی صحیح است که ما همه اوزان ورودی و خروجی غیر منفی و یا از میان انواعی که مطابق با محدودیت های وزنی است، جست و جو کنیم.

نتایج ما می تواند بر تفاوت بین تفسیر مدل های پوششی و مضرری با محدودیت های وزنی غلبه کند. در واقع، همان طور که در بالا گفته شد، مدل پوششی، DMU را در برابر همه DMU ها در فناوری توسعه یافته توسط محدودیت های وزنی معیار بندی می کند. با این حال، تفسیر مدل مضرری فرض می کند که DMU بایستی در برابر تنها DMU های مشاهده شده الگوبرداری شود. همان طور که گفته شد، این فرض مرسوم منجر به تفسیر معنی دار برخی از انواع محدودیت های وزنی نمی شود. نتایج نشان می دهد که مدل مضرر دقیقاً مشابه با مدل پوششی می باشد: DMU را در برابر همه DMU ها در فناوری توسعه یافته برای همه انواع محدودیت های وزنی معیار بندی می کند.

از دیدگاه عملی، این تفسیر جدید را می توان برای توجیه استفاده از انواع محدودیت های وزنی در مدل ضرب و توضیح معنی اوزان بهینه و امتیازات کارایی استفاده کرد. این شامل کران های وزن مطلق و محدودیت های وزنی پیوسته می باشد که معنی آن تاکنون مبهم باقی مانده است.

2- محدودیت های وزن و مبادله تولید

به طور ویژه، ما نتایج اصلی را برای مدل های ورودی محور تحت فرض CRS استخراج می کنیم. این نتایج به طور کامل قابل تعمیم به مدل های خروجی محور و نیز VRS با کم ترین اصلاحات می باشد که در بخش 5 توضیح داده شده است.

1-2 مدل های مضربی با محدودیت های وزن

مجموعه ای از DMU های مشاهده شده $(X_j, Y_j), j = 1, \dots, N$ را در نظر بگیرید که در آن $X_j \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$ و $Y_j \in \mathbb{R}_+^s \setminus \{0\}$ به ترتیب بردار های ورودی و خروجی هستند. DMU0 های تحت ارزیابی با (X_0, Y_0) نمایش داده می شود.

مدل های CRS مضربی از حیث بردار های متغیر اوزان ورودی و خروجی $u \in \mathbb{R}_+^s$ و $v \in \mathbb{R}_+^m$ بیان می شوند. اوزان وزنی، محدودیت های اضافی بر بردار های u و v گنجانده شده در مدل مضربی بوده و به طور کلی به صورت زیر بیان می شوند

$$Q_t^T u - P_t^T v \leq c_t, \quad t = 1, \dots, K. \quad (1)$$

در نامساوی 1، مولفه های بردار های $Q_t \in \mathbb{R}^s$ و $P_t \in \mathbb{R}^m$ و اسکالر های ثابت c_t ممکن است مثبت، منفی یا صفر باشند. محدودیت وزن t در صورتی به صورت پیوسته است که هر دو بردار Q_t و P_t غیر صفر باشد و در غیر این صورت ناپیوسته خواهد بود. محدودیت وزن T در صورتی همگن است که $c_t = 0$ باشد و در غیر این صورت ناهمگن است.

تبصره 1: با استفاده از نرمال سازی مساوی مدل های مضربی، هر محدودیت وزنی ناهمگن را می توان با محدودیت وزنی همگن جایگزین کرد. برای مثال، با استفاده از مساوی (2-2) که در زیر بیان شده است، محدودیت وزنی

ناهمگن t با محدودیت وزنی همگن جایگزین می شود که پس از یک بازاریابی ساده، $Q_t^T u - (P_t + c_t X_0)^T v \leq 0$ را اختیار می کند.

بر اساس تبصره 1 و بنابر این بدون از دست دادن عمومیت، می توان فرض کرد که همه محدودیت های وزنی (1) همگن می باشند. مدل مضرب CRS ورودی محور با این محدودیت های وزنی به صورت زیر بیان می شود

$$\theta^* = \max Y_0^T u \quad (2.1)$$

$$X_0^T v = 1, \quad (2.2)$$

$$Y_j^T u - X_j^T v \leq 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.3)$$

$$Q_t^T u - P_t^T v \leq 0, \quad t = 1, \dots, K, \quad (2.4)$$

$$u, v \geq 0. \quad (2.5)$$

2-2 مدل های پوششی با مبادله تولید

برای اثبات این که محدودیت های وزنی (2-4) منجر به توسعه فناوری CRS استاندارد می شود، مدل پوششی مضاعف را برای برنامه 2 در نظر بگیرید

$$\theta^* = \min \theta \quad (3.1)$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j X_j + \sum_{t=1}^K \pi_t P_t + S_X = \theta X_0, \quad (3.2)$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j Y_j + \sum_{t=1}^K \pi_t Q_t - S_Y = Y_0, \quad (3.3)$$

$$\lambda, \pi, S_X, S_Y \geq 0, \theta$$

مدل فوق، امکان تفسیر ساده را می دهد. DMU

$$(\hat{X}, \hat{Y}) = \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j X_j, \sum_{j=1}^N \lambda_j Y_j \right)$$

در مساوی های 2-3-3 ، واحدی در فناوری CRS استاندارد می باشد. $DMU (\hat{X}, \hat{Y})$ با جملات تولید شده با محدودیت های وزنی (2-4) اصلاح می شود (2-4)

$$(P_t, Q_t), \quad t = 1, \dots, K. \quad (4)$$

جدول 1: DMU ها در مثال 1

DMU	Input	Output 1	Output 2
A	1	1	2
B	1	2	1
C	1	0	4

این جملات تغییرات همزمان ورودی ها و خروجی ها را نشان داده و در نسبت های $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_K) \geq 0$ پیاده سازی می شوند. در نهایت، بردار های کمکی S_X و S_Y متناظر با فرض دسترسی آزاد به ورودی ها و خروجی ها است/

بر طبق پودینوسکی (2004 الف)، جملات (4) موسوم به مبادله تولید می باشند. با کمینه سازی θ ، برنامه (3) نمایش شعاعی ورودی DMU0 را بر روی مرز فناوری CRS توسعه یافته T_{CRS-TO} شناسایی می کند که به صورت زیر تعریف می شود

تعریف 1 (پودینوسکی 2004 الف): فناوری T_{CRS-TO} مجموعه ای از همه زوج های $(X, Y) \in \mathbb{R}_+^{m+s}$ می باشد که برای آن ها بردار های $S_Y \in \mathbb{R}_+^s$ و $S_X \in \mathbb{R}_+^m$ ، $\lambda \in \mathbb{R}_+^N$ ، $\pi \in \mathbb{R}_+^K$ وجود دارد به طوری که

$$\begin{aligned} X &= \sum_{j=1}^N \lambda_j X_j + \sum_{t=1}^K \pi_t P_t + S_X, \\ Y &= \sum_{j=1}^N \lambda_j Y_j + \sum_{t=1}^K \pi_t Q_t - S_Y. \end{aligned} \quad (5)$$

تبصره 2: بدیهی است که در برخی از موارد، مدل مضربی (2) ممکن است غیر موجه باشد که متناظر با مقدار بهینه نامحدود (یعنی مساوی با $-\infty$) مدل پوششی مضاعف می باشد. پودینوسکی و بازودیت-کاموا (2013-2015) اثبات کرده است که در همه این موارد، فناوری توسعه یافته T_{CRS-TO} امکان تولید آزاد را می دهد یعنی

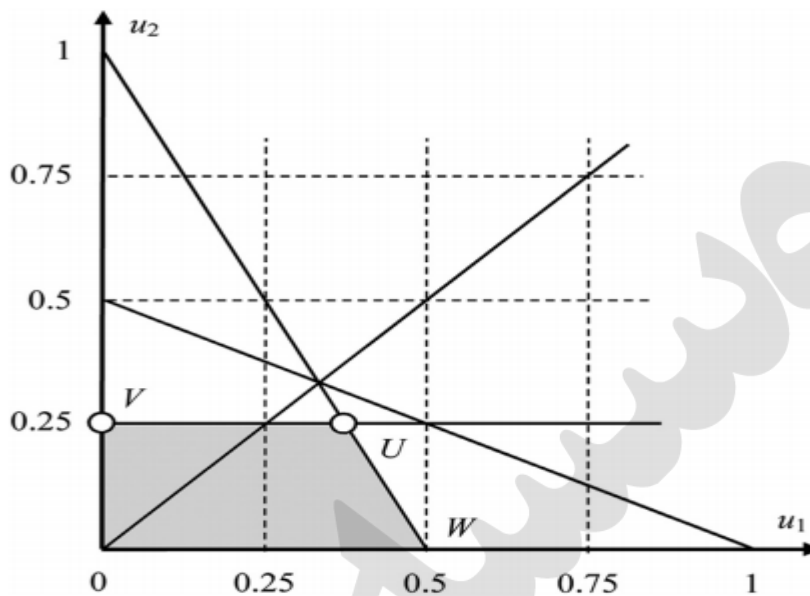
یک $DMU (\bar{X}, \bar{Y}) \in \mathcal{T}_{CRS-TO}$ وجود دارد به طوری که $\bar{X} = 0$ و $\bar{Y} \neq 0$ می باشد. در این صورت، محدودیت های وزنی (2-4) و مبادلات (4) ناپیوسته و متناقض می باشند (با مجموعه داده های تشکیل شده با DMU های مشاهده شده). پودینوسکی و بوزدین-چاموا (2015) نشان می دهد که محدودیت های وزنی در صورتی ناپیوسته و متناقض هستند که حتی اگر برنامه (2) موجه باشد و تست های محاسباتی و تحلیلی از پیوستگی را توسعه می دهد. در صورتی که محدودیت های وزنی ناپیوسته باشند، این معمولاً اشاره به خطا در ارزیابی دارد و محدودیت های وزنی بایستی مجدداً در نظر گرفته شوند. در این مقاله، فرض بر این است که محدودیت های وزنی (2-4) پیوسته و نامتناقض می باشند. به طور ویژه، این فرض بیانگر این است که برنامه (2) دارای ارزش بهینه متناهی $\theta^* > 0$ می باشد به شرط این که $X_0 \neq 0$ و $Y_0 \neq 0$ می باشد.

3- مثال انگیزشی

مثال زیر نشان می دهد که اوزان (u, v) که DMU را در مقایسه با همه DMU های مشاهده شده نشان می دهد، به طور کلی متفاوت از اوزانی است که DMU0 را در مقایسه با همه DMU ها در فناوری توسعه یافته \mathcal{T}_{CRS-TO} نشان می دهد.

مثال 1: جدول 1 دو DMU A-B مشاهده شده را در مدل با یک ورودی و دو خروجی نشان می دهد (DMU C مشاهده نمی شود و در زیر معرفی شده است). مدل CRS مضرب را برای ارزیابی کارایی شعاعی ورودی DMU A در نظر بگیرید که در آن ما از محدودیت وزنی پیوسته $4u_2 - v_1 \leq 0$ استفاده می کنیم.

$$\theta^* = \max \quad 1u_1 + 2u_2 \quad (6.1)$$



شکل 1: یک راه حل گرافیکی از مثال 1. اوزان خروجی در نقطه $U = (0.375, 0.25)$ در برنامه 6 بهینه می باشد. با توجه به قضیه 2، این اوزان بیانگر DMU A در بهترین حالت در مقایسه با همه DMU ها در فناوری $TCRS-TO$ می باشد. اوزان در نقطه $V = (0, 0.25)$ در برنامه 6 بهینه نیستند و بیانگر DMU A در مقایسه با مجموعه ای از DMU های مشاهده شده می باشند.

$$\text{به شرط این که} \quad 1v_1 = 1, \quad (6.2) \quad \text{باشد داریم}$$

$$1u_1 + 2u_2 - 1v_1 \leq 0, \quad (6.3)$$

$$2u_1 + 1u_2 - 1v_1 \leq 0, \quad (6.4)$$

$$4u_2 - 1v_1 \leq 0, \quad (6.5)$$

$$u_1, u_2, v_1 \geq 0. \quad (6.6)$$

شکل 1 منطقه موجه برنامه (6) را در ابعاد u_1 و u_2 نشان می دهد. $v_1 = 1$ در هر راه حل موجه بوده و نشان داده نشده است. همان طور که نمودار نشان می دهد، برنامه راه حل بهینه منحصر به فرد (6) $u_1^* = 0.375, u_2^* = 0.25$ می باشد. مقدار بهینه متناظر برنامه (6) $\theta^* = 0.875$ می باشد.

الگوبرداری در برابر تنها واحد های تصمیم گیری مشاهده شده: می توان به سادگی نشان داد که اوزان بهینه $(u_1^*, u_2^*, \bar{v}_1^*)$ بیانگر DMU A در مقایسه با همه DMU های مشاهده شده می باشد که توسط کارنز و همکاران

1978 نشان داده شده است که اکنون تفسیر استاندارد را در نظر می‌گیرد. در واقع، نسبت های کارایی DMU A-B مشاهده شده به صورت زیر تعریف می‌شود

$$E_A(u, v) = \frac{1u_1 + 2u_2}{1v_1}, \quad E_B(u, v) = \frac{2u_1 + 1u_2}{1v_1}. \quad (7)$$

با جایگزاری اوزان بهینه فوق در (7)، می‌توان $E_A(u^*, v^*) = 0.875$ و $E_B(u^*, v^*) = 1$ را بدست آورد. از این روی، DMU A بر اساس راه حل بهینه برنامه 6، بایستی به صورت ناکارآمد در نظر گرفته شود. با این حال، دیگر راه حل موجه برنامه (6) $\hat{u}_1 = 0$ و $\hat{u}_2 = 0.25$ را همراه با $\hat{v}_1 = 1$ در نظر بگیرید (نقطه V در شکل 1). با جایگذاری این اوزان در (7)، $E_A(\hat{u}, \hat{v}) = 0.5$ و $E_B(\hat{u}, \hat{v}) = 0.25$ را بدست می‌آوریم. این نشان می‌دهد که به ازای اوزان خروجی نشان داده شده با نقطه V، DMU A دارای ماکزیمم نسبت کارایی در میان همه واحد های تصمیم گیری مشاهده شده بوده و بایستی به صورت کارآمد تلقی شود.

اکنون بدیهی است که مقدار بهینه 0.875 را می‌توان در مقایسه با همه DMU های مشاهده شده بدست آورد. از این روی، اوزان بهینه (u_1^*, u_2^*, v_1^*) برای DMU A بسیار مطلوب نمی‌باشند. مسئله فوق اولین بار توسط پودینوسکی و اتاناسپولوس (1998) و پودینوسکی (1999، 2001 الف) شناسایی شد که یک روشی را توسعه داد که به طور صحیح هر DMU0 را در برابر DMU های مشاهده شده الگوبرداری می‌کند.

جدول 2: نسبت های کارایی برای اوزان مضرب های مختلف در مثال 1

DMU	Point U: $u_1^* = 0.375, u_2^* = 0.25, v_1^* = 1$	Point V: $\hat{u}_1 = 0, \hat{u}_2 = 0.25, \hat{v}_1 = 1$
A	0.875	0.5
B	1	0.25
C	1	1

مسئله فوق برای اولین بار توسط پودینوسکی و اتاناسپولوس (1998) و پودینوسکی (1999، 2001 الف) شناسایی شد که روشی را برای الگوبرداری صحیح هر DMU0 با DMU های مشاهده شده توسعه داد. در این مقاله، یک

مسیر متفاوت را اختیار می کنیم و نشان می دهیم که اوزان بهینه فوق (u_1^*, u_2^*, v_1^*) در حقیقت معنی دار هستند. یعنی، به جای نشان دادن DMU A در بهترین حالت در مقایسه با DMU های مشاهده شده، آن ها این DMU را در برابر فناوری کامل T_{CRS-TO} الگوبرداری می کنند. این در زیر نشان داده شده است.

الگوبرداری در برابر فناوری کامل: همان طور که در بخش 2 نشان داده شده است، محدودیت وزن (5-6)، ایجاد $P = (1), Q = (0, 4)^T$ متوازن می کند. بر اساس تعریف 1، فناوری T_{CRS-TO} متشکل از همه DMUs (x_1, y_1, y_2) های غیر منفی می باشد که به صورت زیر بیان می شود

$$\begin{aligned} x_1 &= 1\lambda_A + 1\lambda_B + 1\pi_1 + S_{x_1}, \\ y_1 &= 1\lambda_A + 2\lambda_B - S_{y_1}, \\ y_2 &= 2\lambda_A + 1\lambda_B + 4\pi_1 - S_{y_2}, \end{aligned} \quad (8)$$

که $\lambda_A, \lambda_B, \pi_1, S_{x_1}, S_{y_1}, S_{y_2} \geq 0$ می باشد.

DMU C در جدول 1 را در نظر بگیرید. این مطابق با معادله 8 با $\pi_1 = 1$ و $\lambda_A = \lambda_B = S_{x_1} = S_{y_1} = S_{y_2} = 0$ است. از این روی، $C \in T_{CRS-TO}$ است. نسبت کارایی DMU C در هر دو نقطه U و V برابر با 1 است.

جدول 2 نسبت های کارایی سه DMU A-B-C را در دو مجموعه از اوزان نشان می دهد. مشاهده کنید که اگرچه اوزان $(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{v}_1)$ بیانگر DMU A در مقایسه با DMU V می باشد، این اوزان در صورتی که A با C مقایسه شود، در بهترین حالت خود قرار ندارند. در واقع، در نقطه U، نسبت کارایی A برابر با 0.875 از نسبت کارایی C می باشد در حالی که در نقطه V، این تنها 0.5 است.

مثال فوق بیانگر هدف اصلی این مقاله می باشد که در زیر توضیح داده شده است. یعنی قضیه 2 اثبات می کند که اوزان بهینه (u_1^*, u_2^*, v_1^*) برنامه 6 بیانگر DMU A در بهریت حالت در مقایسه با همه DMU ها در فناوری توسعه یافته می باشد. به علاوه، مقدار بهینه 0.875، بالاترین نسبت کارایی است که DMU A می تواند به آن دست پیدا کند به خصوص اگر در برابر همه واحد های تصمیم گیری در فناوری الگوبرداری شود.

در این بخش، ما نشان می دهیم که هر اوزان بهینه (u^*, v^*) با مدل ضربی (2)، DMU0 را در بهترین حالت در مقایسه با همه واحد ها در فناوری \mathcal{T}_{CRS-TO} نشان می دهد. همان طور که در مثال 1 نشان داده شده است، این تفسیر صحیح نیست به خصوص اگر DMU0 در برابر مجموعه ای از DMU های مشاهده شده الگوبرداری شوند.

تفسیر فوق با توجه به نتایج اثبات شده برای سه نوع متفاوت از مدل ضربی قابل تایید است. این شامل مدل ضربی با محدودیت های خطی، آنالوگ کسری خطی آن که در آن ماکزیمم نسبت کارایی با مقدار بالاتر از 1 محدود می شود و در ماکزیمم مدل که در آن نرمال سازی لازم نیست، می باشد.

به این ترتیب، فرض می شود که DMU0 هر واحدی در آن فناوری \mathcal{T}_{CRS-TO} می باشد به طوری که $Y_0 \in \mathbb{R}_+^s \setminus \{0\}$ و $X_0 \in \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$ می باشد. به ویژه DMU0 می تواند یکی از واحد های مشاهده شده باشد.

1-4 مدل ضرب خطی

برنامه زیر را با تعداد نامتناهی از محدودیت های خطی در نظر بگیرید و در نظر بگیرید که این برنامه متفاوت از مدل ضربی استاندارد (2) است

$$\theta_1^* = \max Y_0^T u \quad (9.1)$$

$$\text{subject to } X_0^T v = 1, \quad (9.2)$$

$$Y^T u - X^T v \leq 0, \quad \forall (X, Y) \in \mathcal{T}_{CRS-TO}, \quad (9.3)$$

$$u, v \geq 0. \quad (9.4)$$

Ω و Ω^* به ترتیب مجموعه ای از راه حل های موجه و بهینه برای برنامه (2) به ترتیب می باشند. به طور مشابه فرض کنید که Ω_1 و Ω_1^* به ترتیب مجموعه ای از راه حل های موجه و بهینه برنامه (9) باشند.

قضیه 1: اگر راه حل (u, v) در برنامه (2) موجه باشد، آنگاه (u, v) در (9) موجه است. اگر (u^*, v^*) در (2) بهینه باشد، آنگاه، (u^*, v^*) در (9) بهینه است. از این روی، ماکزیمم در برنامه (9) بدست می آید، $\Omega \subseteq \Omega_1$ ،

$$\theta^* = \theta_1^* \text{ و } \Omega^* \subseteq \Omega_1^*$$

قضیه 1 و نتایج دیگر در پیوست الف نشان داده شده اند.

گزاره 1: برای $DMU(X, Y) = (\theta^* X_0, Y_0) \in \mathcal{T}_{CRS-TO}$ پیش بینی شده و به ازای اوزان بهینه (u^*, v^*) در

برنامه (9)، نامساوی (9-3) به صورت مساوی $Y_0^T u^* - \theta^* X_0^T v^* = 0$ در نظر گرفته می شود.

گزاره 1 به طور ضمنی حاکی از آن است که معادله $Y^T u^* - X^T v^* = 0$ ، ابر صفحه مربوط به فناوری \mathcal{T}_{CRS-TO}

را در $(\theta^* X_0, Y_0)$ تعریف می کند و این که $(-v^*, u^*)$ بردار نرمال می باشد و این که (u^*, v^*) اوزان بهینه در برنامه (9) و یا با قضیه 1 (در برنامه 2) است.

مثال 2 در پیوست ب نشان می دهد که منطقه موجه برنامه (9) می تواند بزرگ تر از منطقه موجه برنامه (2)

باشد یعنی به طور کلی $\Omega \neq \Omega_1$ می باشد. به طور مشابه، در موارد کلی، $\Omega^* \neq \Omega_1^*$ است. با این حال، در یک مورد خاص مهم، نتیجه زیر را داریم.

گزاره 2: فرض کنید همه مولفه های بردار X_0 و Y_0 مثبت باشد. آنگاه، $\Omega^* = \Omega_1^*$ است.

اهمیت قضیه 1 برای تفسیر اوزان بهینه (u^*, v^*) زمانی مشخص تر می شود که برنامه (9) در یک فرم کسری خطی بیان شود که در زیر نشان داده شده است

2-4 مدل کسری خطی

مشابه با مدل CRS استاندارد، برنامه (9) را می توان به شکل کسری خطی بیان کرد:

$$\theta_2^* = \max Y_0^T u / X_0^T v \quad (10.1)$$

منوط به این که

$$Y^T u / X^T v \leq 1, \quad \forall (X, Y) \in \mathcal{T}_{CRS-TO}, \quad (10.2)$$

$$u, v \geq 0. \quad (10.3)$$

باشد.

قضیه 2: در صورتی که راه حل (u^*, v^*) در برنامه 2 بهینه باشد، آنگاه (u^*, v^*) در برنامه 10 بهینه می باشد.

به این ترتیب، ماکزیمم در برنامه 10 بدست آمده و $\theta^* = \theta_2^*$ می باشد.

گزاره 3: به ازای $DMU(X, Y) = (\theta^* X_0, Y_0) \in \mathcal{T}_{CRS-TO}$ و به ازای اوزان بهینه (u^*, v^*) برای برنامه 10، نامساوی 10-2 به صورت مساوی $(Y_0^T u^*) / (\theta^* X_0^T v^*) = 1$ در نظر گرفته می شود

بر اساس قضیه 2، هر یک از اوزان بهینه (u^*, v^*) برای مدل مضرب با محدودیت های وزنی (2) موجب بیشینه سازی نسبت کارایی $DMU_0 Y_0^T u / X_0^T v$ با توجه به نسبت های کارایی همه DMU ها در فناوری \mathcal{T}_{CRS-TO} می شود به شرط این که هیچ یک از این نسبت ها به بیش از مقدار 1 نرسد. با استفاده از گزاره 3، می توان آخرین شرط را تغییر داد مبنی بر این که ماکزیمم نسبت کارایی در همه واحد های تصمیم گیری برابر با 1 است. به علاوه، برنامه 10 به طور صریح محدودیت های وزنی (2-4) را در نظر نمی گیرد، اگرچه این ها به طور ضمنی در تعریف فناوری \mathcal{T}_{CRS-TO} و در محدودیت های 10-2 در نظر گرفته می شود.

این بدین معنی است که هر یک از اوزان بهینه (u^*, v^*) برای مدل مضربی (2) بیانگر DMU در بهترین حالت در مقایسه با همه واحد های تصمیم گیری در فناوری \mathcal{T}_{CRS-TO} است. به علاوه، این اوزان برای DMU ها در میان همه اوزان غیر منفی مطلوب ترین است و تنها مطابق با محدودیت های وزنی (2-4) نیست. توجه کنید که همان طور که در مثال 1 نشان داده شده است، این تفسیر بیانگر این نیست که اوزان بهینه (u^*, v^*) موجب بیشینه سازی نسبت کارایی DMU با توجه به تنها DMU های مشاهده شده می شود.

3-4 مدل ماکزیمم (بیشینه)

محدودیت های برنامه (10)، نسبت کارایی ماکزیمم همه DMU ها را با 1 نرمال سازی می کند. همان طور که در زیر نشان داده شده است، این شرایط را می توان حذف کرد و برنامه (10) در فرم زیر مشابه با برنامه ماکزیمم در مطالعه پودینوسکی و انازپوسولس 1998 و پودینوسکی 2001 الف می باشد:

$$\begin{aligned} \theta_3^* &= \max_{u, v \geq 0} \left(\frac{Y_0^T u / X_0^T v}{\sup_{(X, Y) \in \mathcal{T}_{CRS-TO}} \{Y^T u / X^T v\}} \right) \\ &= \max_{u, v \geq 0} \left(\inf_{(X, Y) \in \mathcal{T}_{CRS-TO}} \left\{ \frac{Y_0^T u / X_0^T v}{Y^T u / X^T v} \right\} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

قضیه 3: در صورتی که راه حل (u^*, v^*) در برنامه 2 بهینه باشد، (u^*, v^*) در برنامه 11 بهینه می باشد از این روی، ماکزیمم در برنامه 11 بدست آمده و $\theta^* = \theta_3^*$ می باشد.

بر طبق نتایج فوق، اوزان (u^*, v^*) نسبت کارایی DMU0 را در مقایسه با همه DMU ها در فناوری \mathcal{T}_{CRS-TO} بیشینه سازی می کند به خصوص زمانی که کران بالایی در این نسبت ها تعیین نشود. این بدین معنی است که کران بالایی 1 بر روی نسبت های کارایی در نامساوی (10-2) بی اهمیت می باشد و اوزان (u^*, v^*) مطلوب ترین DMU ها در میان اوزان غیر منفی بدون هر گونه شرط اضافی است.

5- مورد VRS

تفسیر مشابه اوزان بهینه در مورد VRS بدست می آید. به منظور اجتناب از تکرار، این مورد در زیر نشان داده شده است. آنالوگ VRS از مدل مضرب ورودی محور (2) با متغیر آزاد اضافی u_0 بیان می شود

$$\hat{\theta}^* = \max Y_0^T u + u_0 \quad (12.1)$$

$$\text{subject to } X_0^T v = 1, \quad (12.2)$$

$$Y_j^T u - X_j^T v + u_0 \leq 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (12.3)$$

$$Q_t^T u - P_t^T v \leq 0, \quad t = 1, \dots, K, \quad (12.4)$$

$$u, v \geq 0, u_0 \text{ sign free.} \quad (12.5)$$

مدل پوششی مضاعف متناظر برنامه (3) می باشد که دارای یک مساوی نرمال کننده اضافی می باشد

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j = 1. \quad (13)$$

تعریف 2 (پودینوسکی 2004 الف): فناوری \mathcal{T}_{VRS-TO} مجموعه ای از همه زوج های $(X, Y) \in \mathbb{R}_+^{m+s}$ می باشد

که بردار های $\lambda, \pi, S_X, S_Y \geq 0$ با ابعاد مناسب وجود دارد به طوری که همه مساوی های (5) و مساوی نرمال ساز (13) صحیح باشند.

برنامه را با تعداد نامتناهی از محدودیت های خطی در نظر بگیرید

$$\hat{\theta}_1^* = \max Y_0^T u + u_0 \quad (14.1)$$

$$\text{subject to } X_0^T v = 1, \quad (14.2)$$

$$Y^T u - X^T v + u_0 \leq 0, \quad \forall (X, Y) \in \mathcal{T}_{\text{VRS-TO}}, \quad (14.3)$$

$$u, v \geq 0, u_0 \text{ sign free.} \quad (14.4)$$

$\hat{\Omega}^*$ و $\hat{\Omega}$ به ترتیب مجموعه ای از راه حل های بهینه و موجه برای برنامه (12) می باشد. به طور مشابه، فرض کنید که $\hat{\Omega}_1^*$ و $\hat{\Omega}_1$ به ترتیب مجموعه های موجه و بهینه از برنامه (14) باشد.

قضیه 4: در صورتی که راه حل (u, v, u_0) در برنامه (12) موجه باشد، انگاه (u, v, u_0) در (14) موجه می باشد. اگر (u^*, v^*, u_0^*) در (12) بهینه باشد، انگاه (u^*, v^*, u_0^*) در (14) بهینه باشد. از این روی، ماکزیمم در برنامه

$$14 \text{ دست می آید: } \hat{\theta}^* = \hat{\theta}_1^* \text{ و } \hat{\Omega} \subseteq \hat{\Omega}_1, \hat{\Omega}^* \subseteq \hat{\Omega}_1^*$$

همانند مورد CRS، برنامه 14 را می توان به شکل کسری خطی زیر بیان کرد

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_2^* &= \max (Y_0^T u + u_0) / X_0^T v \\ \text{subject to } &(Y^T u + u_0) / X^T v \leq 1, \quad \forall (X, Y) \in \mathcal{T}_{\text{VRS-TO}}, \\ &u, v \geq 0, u_0 \text{ sign free.} \end{aligned} \quad (15)$$

قضیه 5: اگر راه حل (u^*, v^*, u_0^*) در برنامه 12 بهینه باشد، انگاه (u^*, v^*, u_0^*) در برنامه 15 بهینه خواهد بود.

از این روی، ماکزیمم در برنامه (15) بدست آمده و $\hat{\theta}^* = \hat{\theta}_2^*$ است.

اثبات قضیه 5 بر گرفته از اثبات قضیه 2 می باشد. به علاوه، همانند مورد CRS، برنامه 15 را می توان به شکل ماکزیمم مشابه با 11 بیان کرد. یک بخشی از قضیه 3 برای این مورد نیز می تواند ساده باشد.

همان طور که در بالا گفته شد، تفسیر اوزان بهینه (u^*, v^*, u_0^*) به مدل مضرب VRS (12) مشابه با مورد CRS

می باشد. یعنی، این اوزان، برای DMUO در مقایسه با همه DMU ها در فناوری توسعه یافته $\mathcal{T}_{\text{VRS-TO}}$ است.

6- خلاصه و بحث

ما به طور ویژه بحث خود را به راه حل های بهینه مدل های مضر بی ورودی محور تحت فرض CRS محدود می کنیم. مشاهدات یکسان با اصلاحات مشهود به مدل های CRS خروجی محور و مدل های بیان شده تحت فرض VRS قابل تعمیم می باشند.

تفسیر مرسوم ارایه شده توسط کارنز و همکاران 1978 برای هر یک از اوزان بهینه (u^*, v^*) در مدل CRS مضرب استاندارد (بدون محدودیت های وزنی) نشان می دهد که اوزان بیانگر DMU0 در بهترین حالت در مقایسه با همه DMU های مشاهده شده است. بر اساس گفته پودینوسکی (2001)، همین تفسیر برای مدل های مضر بی با محدودیت های اوزان صادق است به شرط این که مورد اخیر همگن و غیر پیوسته باشد. برای سهولت استناد، این را به صورت زیر بیان می کنیم

تفسیر 1: فرض کنید که همه محدودیت های وزنی همگن (2-4) ناپیوسته باشند، آنگاه اوزان بهینه (u^*, v^*) برای مدل مضرب 2 برای DMU0 مطلوب ترین است به خصوص اگر مدل مضر بی 2 در برابر همه DMU های مشاهده شده الگوبرداری شوند.

تفسیر 1 به این معنی است که برای اوزان (u^*, v^*) ، نسبت کارایی $Y_o^T u / X_o^T v$ از DMU0، در رابطه با ماکزیمم نسبت مشابه در همه DMU های مشاهده شده به ماکزیمم مقدار خود می رسد. همان طور که مثال های پودینوسکی و اتانسوپولوس 1998 و منابع دیگر نشان می دهد، تفسیر 1 دیگر به طور کلی معتبر نیست به طوری که شامل محدودیت های وزن ناهمگن می باشد. این بدین معنی است که معنی کارایی DMU0 از حیث مدل مضرب با محدودیت های وزنی، تا کنون مبهم باقی مانده است.

بر عکس، تفسیر کارایی از حیث مدل پوششی، کامل تر است. پودینوسکی (2004 الف) نشان می دهد که تفسیر محدودیت های وزنی در مدل مضر بی منجر به توسعه مدل فناوری از طریق دو جمله می شود. مدل پوششی، DMU0 را در مرز این فناوری پیش بینی می کند. به عبارت دیگر، این مدل DMU0 در برابر همه DMU ها در کل فناوری الگوبرداری می شوند.

مشاهدات فوق دو مسئله را با تفسیر مرسوم نشان می دهند. اولاً، اگرچه کارایی DMU0 را می توان به صورت ضریب بهبود نسبی در مدل پوششی با محدودیت های وزنی تفسیر کرد، مدل مضر بی امکان تفسیر کارایی را تنها برای انواع مختلف محدودیت های وزنی می دهد.

دوم، حتی برای محدودیت های وزنی همگن و ناپیوسته، که برای آن هر دو مدل تفسیر معنی دار را ارائه می کند، دو مدل، DMUO را در برابر مجموعه های متفاوتی از Dmu ها الگوبرداری می کند. همان طور که گفته شد، باری مدل مضرب با محدودیت های وزنی، این شامل مجموعه ای از واحد های تصمیم گیری مشاهده شده است و برای مدل پوششی، این شامل مجموعه ای از همه واحد های تصمیم گیری در فناوری از جمله واحد های مشاهده نشده است.

اصلاحات انجام شده موجب کاهش تفاوت های فوق با تغییر رویکرد تفسیر مدل مضربی می شود. بر اساس قضیه 3-1 و بحث آن ها، نتایج اصلی را می توان به صورت زیر خلاصه سازی کرد.

تفسیر 2: هر اوزان بهینه (u^*, v^*) نسبت به مدل مضربی (2) با محدودیت های وزنی (204)، در صورتی برای DMUO مطلوب است که مورد اخیر در برابر همه واحد های تصمیم گیری در کل فناوری T_{CRS-TO} الگوبرداری شود. به علاوه، اوزان (u^*, v^*) ضمن کاهش محدودیت های وزنی به دلیل محدودیت های مدل 2، DMUO در میان همه اوزان غیر منفی (u, v) در نظر گرفته می شود و تنها مربوط به محدودیت های وزنی نیست.

در صورتی که همه محدودیت های وزنی همگن و غیر پیوسته باشند، نگاه تفسیرات 1 و 2 قابل کاربرد می باشند. در غیر این صورت، مورد داوم صحیح است. برای مثال، هر دو تفسیر قابل تعمیم به مدل CRS مضرب استاندارد بدون محدودیت های وزنی است. یعنی اوزان بهینه (u^*, v^*) در این مدل، DMUO را در بهترین حالت در مقایسه با مجموعه ای از DMU های مشاهده شده و نیز در مقایسه با همه DMU ها در فناوری CRS استاندارد نشان می دهد.

پیوست الف: اثبات

لم 1: مقدار بهینه θ_1^* برنامه 9 بدست می آید و $\theta_1^* = \theta_1^*$ می باشد

اثبات لم 1: T_{CRS-TO} یک مخروط پلی هدرال (پودینوسکی 2015) می باشد. با قضیه 19-1 در راکفلر 1970، با مجموعه متناهی از جهات $(A_k, B_k) \in \mathbb{R}^{m+s}$, $k = 1, \dots, k'$ تولید می شود. از این روی، T_{CRS-TO} مجموعه ای از همه زوج های (X, Y) می باشد که برای آن ها بردار $\mu \in \mathbb{R}_+^{k'}$ وجود دارد به طوری که

$$X = \sum_{k=1}^{k'} \mu_k A_k, \quad Y = \sum_{k=1}^{k'} \mu_k B_k. \quad (\text{A.1})$$

سپس برنامه 3 به صورت زیر بیان می شود

$$\theta^* = \min \theta \quad (\text{A.2.1})$$

$$\text{subject to } \sum_{k=1}^{k'} \mu_k A_k = \theta X_0, \quad (\text{A.2.2})$$

$$\sum_{k=1}^{k'} \mu_k B_k = Y_0, \quad (\text{A.2.3})$$

$$\mu \geq 0, \quad \theta \text{ sign free.} \quad (\text{A.2.4})$$

با تعریف 1، $\mathcal{T}_{\text{CRS-TO}}$ شرط دسترسی ازاد را دارد و می توان مساوی های A-2-2 و A-2-3 را با نامساوی های مناسب جایگزین کرد. به این ترتیب داریم:

$$\theta^* = \max Y_0^T u \quad (\text{A.3.1})$$

$$\text{subject to } X_0^T v = 1, \quad (\text{A.3.2})$$

$$B_k^T u - A_k^T v \leq 0, \quad k = 1, \dots, k', \quad (\text{A.3.3})$$

$$u, v \geq 0. \quad (\text{A.3.4})$$

هر $(X, Y) \in \mathcal{T}_{\text{CRS-TO}}$ شرط (A-1) را با بردار $\mu \geq 0$ دارد. ضرب هر نامساوی $k = 1, \dots, k'$ در A-3-3 در $\mu_k \geq 0$ و افزودن نامساوی های حاصله داریم

$$Y^T u - X^T v \leq 0, \quad \forall (X, Y) \in \mathcal{T}_{\text{CRS-TO}}. \quad (\text{A.4})$$

چون A-3-3 به طور ضمنی اشاره به A-4 دارد، گنجاندن A.4 در A.3 بر منطقه موجه اثری ندارد. A.4 به طور ضمنی اشاره به A.3.3 دارد. با حذف همه نامساوی های A.3.3 به عنوان نامساوی های اضافی و حفظ A.4، می

توان معادله 2 را بدست آورد. از این روی، $\theta_1^* = \theta^*$ بوده و در هر راه حل بهینه نسبت به A.3 بدست می آید

اثبات قضیه 1: فرض کنید $(u, v) \in \Omega$ باشد. می توان اثبات کرد که $(u, v) \in \Omega_1$ می باشد. به این ترتیب

کافی است تا نشان دهیم که (u, v) مطابق با 9.3، $\forall (X, Y) \in \mathcal{T}_{\text{CRS-TO}}$ می باشد. در واقع، هر یک از واحد

های (X, Y) شرط 5 را با برخی بردار های $\lambda, \pi, S_X, S_Y \geq 0$ برقرار کرده است. ضرب هر نامساوی در 2-2- و 3-2 با مولفه های متناظر λ_j و π_{t_i} و افزودن نامساوی های حاصله و این که $S_X, S_Y \geq 0$ می باشد، می توان معادله 3-9 را به دست آورد. در نهایت فرض کنید که $(u^*, v^*) \in \Omega^*$ باشد. سپس، (u^*, v^*) در (9) موجه خواهد بود. بر اساس برنامه (2)، $Y_0^T u^* = \theta^*$ است. با توجه به لم 1، $\theta^* = \theta_1^*$ است. بنابراین این $(u^*, v^*) \in \Omega_1^*$ می باشد.

لم 2: منطقه موجه برنامه (9) در صورتی ثابت است که محدودیت های 3-9 تنها برای $DMUs (X, Y)$ نیاز است که در آن $X^T v > 0$ می باشد یعنی اگر نامساوی های 3-9 با معادله زیر جایگزین شوند

$$Y^T u - X^T v \leq 0, \quad \forall (X, Y) \in \mathcal{T}_{CRS-TO} : X^T v > 0. \quad (A.5)$$

اثبات قضیه 2: اکنون بایستی اثبات کرد که اگر (u, v) مطابق با 2-9 و 4-9 و A.5 باشد، آنگاه (u, v) شرایط معادله 9.3 را داراست. هر $(\tilde{X}, \tilde{Y}) \in \mathcal{T}_{CRS-TO}$. If $\tilde{X}^T v > 0$ ، از A.5 پیروی می کند. فرض کنید که $\tilde{X}^T v = 0$ باشد. دنباله واحد های $(X^k, Y^k), k = 1, 2, \dots$ را در نظر بگیرید که به صورت زیر تعریف می شود

$$(X^k, Y^k) = (\tilde{X}, \tilde{Y}) + (1/k)(X_0, Y_0). \quad (A.6)$$

چون \mathcal{T}_{CRS-TO} یک مخروط چند وجهی است، $(X^k, Y^k) \in \mathcal{T}_{CRS-TO}, \forall k$. از معادله 2-9 و A.6، $(X^k)^T v > 0, \forall k$ می باشد. بر اساس A.5، می توان داشت $(Y^k)^T u - (X^k)^T v \leq 0, \forall k$ ، با اختیار کردن $\tilde{Y}^T u - \tilde{X}^T v \leq 0$ ، داریم $k \rightarrow +\infty$.

اثبات گزاره 1: $(\tilde{X}, \tilde{Y}) = (\theta_1^* X_0, Y_0) = (\theta^* X_0, Y_0)$ را تعریف کنید. بر اساس قضیه 1، $\theta^* > 0$ می باشد.

بر اساس (3)، $(\tilde{X}, \tilde{Y}) \in \mathcal{T}_{CRS-TO}$ می باشد. با معادله (2-9)، $\tilde{X}^T v^* = \theta^* X_0^T v^* = \theta^*$ می باشد. چون $(u^*, v^*) \in \Omega_1^*, \tilde{Y}^T u^* = \theta^*$ می باشد. از این روی،

$$\tilde{Y}^T u^* - \tilde{X}^T v^* = 0. \quad (A.7)$$

□

اثبات گزاره 2: بر اساس قضیه 2، می توان اثبات کرد که $\Omega_1^* \subseteq \Omega^*$ می باشد. فرض کنید که $(u^*, v^*) \in \Omega_1^*$ باشد. چون توابع هدف در 2 و 9 یکسان هستند کافی است که اثبات شود $(u^*, v^*) \in \Omega$. چون $(X_j, Y_j) \in \mathcal{T}_{CRS-TO}$ ، $\forall j = 1, \dots, N$ (3-9) به طور ضمنی دلالت بر (3-2) داشته و مورد (3-2) شرط (u^*, v^*) را داراست. بایستی اثبات کرد که (u^*, v^*) محدودیت های وزنی (4-2) را داراست.

فرض کنید که یک t' وجود دارد که به ازای آن نامساوی 4-2 صحیح است یعنی داریم

$$Q_{t'}^T u^* - P_{t'}^T v^* > 0. \quad (A.8)$$

واحد $(\bar{X}, \bar{Y}) > 0$ را در نظر بگیرید که در اثبات گزاره 1 تعریف می شود. چون $(\bar{X}, \bar{Y}) > 0$ می باشد، یک مقدار کوچک $\pi_{t'} > 0$ وجود دارد به طوری که $(\hat{X}, \hat{Y}) = (\bar{X} + \pi_{t'} P_{t'}, \bar{Y} + \pi_{t'} Q_{t'}) \geq 0$ می باشد. از این روی $(\hat{X}, \hat{Y}) \in \mathcal{T}_{CRS-TO}$ صادق است. بر اساس A7 و A8، $\bar{Y}^T u^* - \hat{X}^T v^* > 0$ را داریم که بر خلاف 3-9 می باشد.

اثبات قضیه 2: بر اساس قضیه 1، (u^*, v^*) در 9 بهینه بوده و $\theta^* = \theta_1^*$ است. بر اساس زیرنویس 3، (u^*, v^*) در 10 موجه می باشد. فرض کنید که (u^*, v^*) در 10 بهینه نیست. آنگاه یک راه حل موجه (u', v') برای 10 وجود دارد به طوری که $Y_0^T u' / X_0^T v' = \theta'$ و $\theta' > \theta_1^*$ می باشد. سپس به ازای هر $\alpha > 0$ ، $(\alpha u', \alpha v')$ در برنامه 10 موجه است و تابع هدف متناظر $(Y_0^T \alpha u') / (X_0^T \alpha v') = \theta'$ می باشد. را طوری تعریف می کنیم که $X_n^T \alpha' v' = 1$ باشد. سپس، $(\alpha' u', \alpha' v')$ در 9 موجه خواهد بود. در واقع، نامساوی های 2-10 به ازای همه مقادیر $(X, Y) \in \mathcal{T}_{CRS-TO}$ صحیح هستند به طوری که $X^T v > 0$ است. این به طور ضمنی بیانگر A-5 است. با لم 2، این به طور ضمنی دلالت بر 3-9 دارد. مقدار متناظر تابع هدف 1-9 معادل با $\theta' > \theta_1^*$ می باشد که ویژگی بهینه θ_1^* را در (9) رد می کند.

اثبات گزاره 3: $\alpha = 1 / (X_0 v^*) > 0$ را تعریف کنید. سپس $(u', v') = (\alpha u^*, \alpha v^*)$ در 10 بهینه می باشد. تکرار انتهای اثبات قضیه 2 نشان می دهد که (u', v') در (9) موجه است. چون $\theta_2^* = (Y_0^T u') / (X_0^T v') =$

$Y_0^T u'$ و $\theta_2^* = \theta_1^*$ می باشد، در (u', v') در 9 بهینه است. با گزاره 1، $Y_0^T u' = \theta^* X_0^T v'$ است. با تقسیم این مساوی بر الف، $Y_0^T u^* = \theta^* X_0^T v^*$ بوده و اثبات به صورت زیر است.

اثبات قضیه 3: برای حل تقسیم بر صفر در برنامه (11)، گزاره را به صورت زیر مطرح می کنیم

$$\theta_3^* = \max_{(u,v) \in \Omega_3} \left(\frac{Y_0^T u / X_0^T v}{\sup_{(X,Y) \in \mathcal{T}_{u,v}} \{Y^T u / X^T v\}} \right), \quad (\text{A.9})$$

که در آن Ω_3 و $\mathcal{T}_{u,v}$

به صورت زیر تعریف می شوند

$$\Omega_3 = \{(u, v) \geq 0 \mid X_0^T v > 0, Y_0^T u > 0\},$$

$$\mathcal{T}_{u,v} = \{(X, Y) \in \mathcal{T}_{\text{CRS-TO}} \mid X^T v > 0\}.$$

توجه کنید که $(u^*, v^*) \in \Omega_3$ و $\Omega_3 \neq \emptyset$ می باشد. در واقع، با معادله (2-2)، $X_0^T v^* = 1 > 0$ و با معادله

1-2 و تبصره 2، $Y_0^T u^* = \theta^* > 0$ می باشد. به علاوه، به ازای $(u, v) \in \Omega_3$ ، $(X_0, Y_0) \in \mathcal{T}_{u,v}$ می باشد. از این

روی به ازای همه $(u, v) \in \Omega_3$ ، مجموعه $\mathcal{T}_{u,v} \neq \emptyset$ مطرح بوده و سوپریمم در مخرج A.9 بزرگ تر از صفر است.

در صورتی که به ازای مقداری از اوزان $(u, v) \in \Omega_3$ ، سوپریمم در مخرج A.9 نامحدود باشد، عبارت درون پرانتز مساوی با صفر در نظر گرفته می شود.

بر اساس گزاره 3، برای اوزان (u^*, v^*) تابع هدف بیان شده در پرانتز برابر با θ^* می باشد و به این ترتیب $\theta_3^* \geq \theta^*$ است.

فرض کنید که (u^*, v^*) در برنامه بهینه نباشد A.9، آنگاه $(u', v') \in \Omega_3$ وجود دارد به طوری که

$$\psi(u', v') = \frac{Y_0^T u' / X_0^T v'}{\sup_{(X,Y) \in \mathcal{T}_{u',v'}} \{Y^T u' / X^T v'\}} = \theta' > \theta^*. \quad (\text{A.10})$$

توجه کنید که به ازای $(u', \alpha v') \in \Omega_3$ ، $\alpha > 0$ ، $\psi(u', \alpha v') = \psi(u', v') = \theta'$ می باشد. لذا

$$\alpha' = \sup_{(X,Y) \in \mathcal{T}_{u',v'}} \{Y^T u' / X^T v'\}.$$

را از $0 < \alpha' < +\infty$ تعریف می کنیم. $(\bar{u}, \bar{v}) = (u', \alpha' v')$ را تعریف کنید.

سپس $\psi(\bar{u}, \bar{v}) = Y_0^T \bar{u} / X_0^T \bar{v} = \theta'$ و $\sup_{(X,Y) \in \mathcal{T}_{\bar{u},\bar{v}}} \{Y^T \bar{u} / X^T \bar{v}\} = 1$ خواهد بود. از این روی، (\bar{u}, \bar{v}) در

برنامه 10 موجه است و مقدار متناظر تابع هدف 1-10 برابر با θ' می باشد. بر اساس A-10، $\theta' > \theta^*$ مطلوب است. این با قضیه 2 تناقض دارد که بر طبق آن θ^* مقدار بهینه برنامه (10) است.
 لم 3: ماکزیمم در برنامه (14) بدست آمده و $\hat{\theta}^* = \hat{\theta}_1^*$ است.

اثبات لم 3: اثبات مشابه با اثبات لم 1 است. چون T_{VRS-TO} یک مجموعه پلی هدرال است، با تعداد متناهی از نقاط $(A_k, B_k) \in \mathbb{R}^{m+s}$ ، $k = 1, \dots, \bar{k}$ و جهات $(A_k, B_k) \in \mathbb{R}^{m+s}$ ، $k = \bar{k} + 1, \dots, k'$ تولید می شود. از این روی T_{VRS-TO} مجموعه ای از همه واحد های (X, Y) است که برای آن ها بردار $\mu \in \mathbb{R}_+^k$ وجود دارد به طوری که

$$X = \sum_{k=1}^{k'} \mu_k A_k, \quad Y = \sum_{k=1}^{k'} \mu_k B_k, \quad \sum_{k=1}^{\bar{k}} \mu_k = 1. \quad (A.11)$$

با کرار اثبات لم 1، داریم

$$\hat{\theta}^* = \max Y_0^T u + u_0 \quad (A.12.1)$$

$$\text{subject to } X_0^T v = 1, \quad (A.12.2)$$

$$B_k^T u - A_k^T v + u_0 \leq 0, \quad k = 1, \dots, \bar{k}, \quad (A.12.3)$$

$$B_k^T u - A_k^T v \leq 0, \quad k = \bar{k} + 1, \dots, k', \quad (A.12.4)$$

$$u, v \geq 0. \quad (A.12.5)$$

هر $(X, Y) \in T_{VRS-TO}$ شرط A-11 را با $\mu \geq 0$ دارد. با ضرب هر نامساوی $k = 1, \dots, k'$ در A-12-3 و A-12-4

در 12-4 با افزودن نامساوی های حاصله داریم

$$Y^T u - X^T v + u_0 \leq 0, \quad \forall (X, Y) \in T_{VRS-TO}. \quad (A.13)$$

چون نامساوی های A-12-3 و A-12-4 اشاره به A-13 دارند، گنجانیدن نامساوی های A-13 در برنامه 1-12 تاثیری بر روی منطقه موجه ندارد. توجه کنید که در برنامه حاصله، عوامل محدود کننده A-12-3 از A-13 پیروی می کنند و می توانند حذف شوند. فرض کنید که اثبات شود نامساوی A-12-4 از A-13 پیروی می کند.

را $k = \bar{k} + 1, \dots, k'$ در نظر بگیرید. بر اساس معادله A-11

می باشد. نامساوی متناظر A-13 به شکل $(X, Y) = (A_1 + \mu_k A_k, B_1 + \mu_k B_k) \in \mathcal{T}_{VRS-TO}, \forall \mu_k > 0$.

زیر خواهد بود

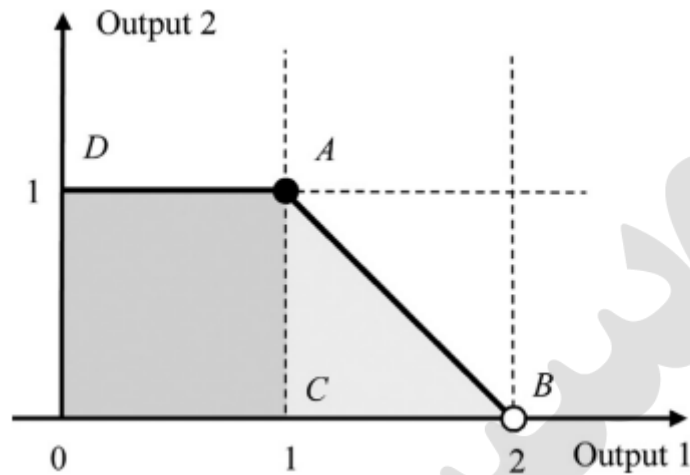
$$(B_1 + \mu_k B_k)^T u - (A_1 + \mu_k A_k)^T v + u_0 \leq 0. \quad (A.14)$$

فرض کنید که (u, v, u_0) مطابق با معادله A-13 و از این روی A-14 باشد. با تقسیم هر دو طرف A-14 بر $\mu_k > 0$ و $\mu_k \rightarrow +\infty$ ، نامساوی K را در A-12-4 بدست می آوریم. از این روی، همه نامساوی های A-12-4 از A-13 پیروی می کنند و می توانند حذف شوند. در نتیجه برنامه A-12 را می توان به صورت 14 بیان کرد و $\hat{\theta}^* = \hat{\theta}_1^*$ خواهد بود.

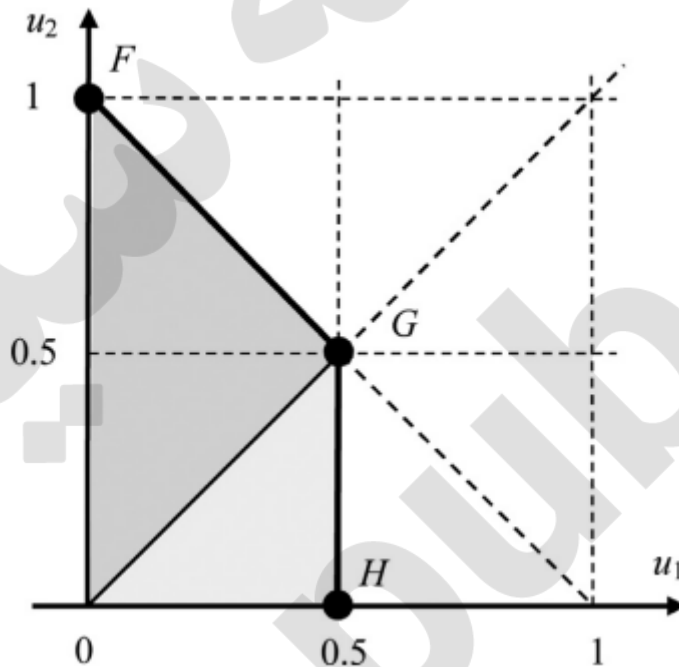
اثبات قضیه 4: اثبات مشاب با اثبات قضیه 1 است. فرض کنید که $(u, v, u_0) \in \hat{\Omega}$ باشد. می توان اثبات کرد که (u, v, u_0) شرایط معادله 3-14 را $\forall (X, Y) \in \mathcal{T}_{VRS-TO}$ دارد. در واقع (\bar{X}, \bar{Y}) مطابق با تعریف 2 با برخی بردارهای $\lambda, \mu, S_X, S_Y \geq 0$ است. با ضرب 2-12 و 3-12 در λ_j و π_t متناظر، و افزودن نامساوی های حاصله و $S_X, S_Y \geq 0$ ، می توان 3-14 را بدست آورد. بنابر این $(u, v, u_0) \in \hat{\Omega}_1$ می باشد. در نهایت $(u^*, v^*, u_0^*) \in \hat{\Omega}^*$ است. به این ترتیب $(u^*, v^*, u_0^*) \in \hat{\Omega}_1$ اثبات می شود. از معادله 12، $Y_0^T u^* + u_0^* = \hat{\theta}^*$ می باشد. بر اساس لم 3، $\hat{\theta}^* = \hat{\theta}_1^*$ می باشد. از این روی $(u^*, v^*, u_0^*) \in \hat{\Omega}_1$ است.

جدول A-3: DMU ها در مثال 2

DMU	Input	Output 1	Output 2
A	1	1	1
B	1	2	0



شکل A-2: فناوری \mathcal{T}_{CRS-TO} در مثال 2



شکل A-3: مناطق موجه و راه حل های بهینه موجه در مثال 2

پیوست ب: مثال های بیشتر

مثال 2: این مثال مکمل با بخش 4-1 است. این نشان می دهد که به طور کلی $\Omega \neq \Omega_1$ و $\Omega^* \neq \Omega_1^*$ برقرار بوده و در عین حال گزاره 2 را توضیح می دهد. در نظر بگیرید که فناوری \mathcal{T}_{CRS-TO} با یک واحد تصمیم گیری A در جدول A-3 تولید شده باشد و یک محدودیت وزنی $u_1 - u_2 \leq 0$ وجود داشته باشد. این با مبادله تولید زیر

$$P = (0), Q = (1, -1)^T \text{ گذارد می گذارد}$$

شکل A-2 بخش فناوری T_{CRS-TO} را در ابعاد خروجی برای سطح ورودی مساوی با 1 نشان می دهد. به طور ویژه، مربع واحد ODAC بخشی از فناوری استاندارد CRS می باشد که با DMU A تولید می شود. بر طبق فرمول (5)، توازن (P, Q) موجب توسعه فناوری به صورت زیر می شود. با اعمال $Q = (1, -1)^T$ به DMU A در نسبت $\pi = 1$ ، ما 1 را به خروجی 1 می افزایشیم و هم زمان 1 را از خروجی 2 کم می کنیم. این DMU V را به فناوری می افزایشیم. با اعمال تبادل مشابه در نسبت $0 < \pi < 1$ ، خط AB تولید می شود. با فرض دسترسی آزاد، مثلث ABC به فناوری افزوده می شود. به طور کلی، بخش فناوری T_{CRS-TO} در ابعاد خروجی، چند وجهی ABOD می باشد.

برنامه های 2 و 9 را در نظر بگیرید. برنامه 2 به صورت زیر بیان می شود (توجه کنید که $v_1=1$ است)

$$\theta^* = \max \quad 1u_1 + 1u_2 \quad (A.15.1)$$

$$\text{subject to} \quad 1v_1 = 1, \quad (A.15.2)$$

$$1u_1 + 1u_2 \leq 1, \quad (A.15.3)$$

$$1u_1 - 1u_2 \leq 0, \quad (A.15.4)$$

$$u_1, u_2, v_1 \geq 0. \quad (A.15.5)$$

منطقه موجه Ω از برنامه فوق متشکل از همه بردارهای (u_1, u_2, v_1) می باشد به طوری که $v_1 = 1$ و زیر بردار (u_1, u_2) در بر گیرنده هر نقطه در مثلث هاشور خورده در OFG در شکل A-3 است.

اکنون به برنامه 9 مراجعه کنید. از شکل A-2، می توان دریافت که T_{CRS-TO} با فناوری استاندارد CRS تولید شده با DMU A-B (بدون محدودیت های وزنی) مقارن است. به این ترتیب می توان به راحتی تایید کرد که منطقه موجه از برنامه 9، در صورتی ثابت باقی می ماند که تعداد نامتناهی از نامساوی های 3-9 با دو نامساوی دبرای DMU A-B جایگزین شوند. این منجر به برنامه زیر می شود

$$\begin{aligned} \theta_1^* &= \max \quad 1u_1 + 1u_2 \\ \text{subject to} \quad &2u_1 - 0u_2 \leq 0, \\ \text{and} \quad &(A.15.2), (A.15.3) \text{ and } (A.15.5). \end{aligned} \quad (A.16)$$

منطقه موجه Ω_1 در این برنامه (از حیث اوزان خروجی U_1 و U_2)، چند وجهی OFGH هاشور خورده در شکل A-3 می باشد مشاهده کنید که $\Omega \neq \Omega_1$ می باشد.

به علاوه، مجموعه ای از راه حل های بهینه Ω^* و Ω_1^* برای برنامه های A-15 و A-16 (از حیث اوزان فوق) مشابه بوده و بر خط FG مماس است. این مشاهده مطابق با گزاره 2 می باشد- توجه کنید که همه ورودی ها و خروجی های DMU A مثبت می باشند.

اکنون ارزیابی کارایی DMU B را در نظر بگیرید که خروجی 2 آن برابر با صفر است. این مستلزم تغییر توابع هدف برنامه A-15 و A-16 به معادله زیر است

$$2u_1 + 0u_2. \quad (A.17)$$

در برنامه A-15، که تابع هدف آن با A-17 جایگزین شده است، تنها اوزان بهینه $(u_1^*, u_2^*) = (0.5, 0.5)$ با نقطه G متناظر می باشند.

جدول A-4: DMU ها در مثال 3

DMU	Input 1	Input 2	Output
A	1	0	1
B	0	1	1
$C(\lambda)$	λ	$1 - \lambda$	1

در برنامه اصلاح شده (A-16)، کل خط GH بیانگر اوزان بهینه (u_1^*, u_2^*) می باشد. این نشان می دهد که اگر فرض گزاره 2 صحیح نباشد (توجه کنید که DMU B شرایط این فرض را ندارد)، آنگاه عموماً شرایط $\Omega^* \neq \Omega_1^*$ بر قرار خواهد بود.

مثال 3: این مثال نشان می دهد که سوپریمم در مخرج معادله 11 نامحدود (معادل با $+\infty$) می باشد که در اثبات قضیه 3 نیز گفته شد. فناوری \mathcal{T}_{CRS-TO} فرضاً توسط DMU A-B در جدول A-4 تولید می شود. در این مثال، هیچ محدودیت وزنی در نظر گرفته نشده است و \mathcal{T}_{CRS-TO} یک فناوری CRS استاندارد است.

را تعریف کنید. بردار های ورودی و $DMU C(\lambda) = \lambda A + (1 - \lambda)B \in \mathcal{T}_{CRS-TO}$, for all $\lambda \in [0, 1]$.

خروجی $DMU C(\lambda)$ به ترتیب $X(\lambda) = (\lambda, 1 - \lambda)^T$ و $Y(\lambda) = (1)$ می باشند که در جدول A-4 نشان

داده شده اند.

فرض کنید که (X_0, Y_0) در برنامه 11، DMU A می باشد. اوزان $(u'_1, v'_1, v'_2) = (1, 1, 0)$ را در نظر بگیرید. انگاه، $X_0^T v' = 1$ and $Y_0^T u' = 1$ خواهد بود.

توجه کنید که $X(\lambda)v' = \lambda v'_1 + (1 - \lambda)v'_2 = \lambda > 0$ و $Y(\lambda)u' = 1u'_1 = 1$ می باشد. نسبت $(Y(\lambda)u')/(X(\lambda)v') \rightarrow +\infty$ as $\lambda \rightarrow 0+$ می باشد. این نشان می دهد که برای اوزان (u'_1, v'_1, v'_2)

سوپریمم در 11 نامحدود است حتی اگر با توجه به $DMUs (X, Y) \in \mathcal{T}_{CRS-TO}$ در نظر گرفته شد که در خصوص آن $X^T v' > 0$ برقرار می باشد.